Die

Arithmetik und Algebra

für

den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Karl Koppe,
Professor.

(Anfangsgründe der reinen Mathematik. I. Theil.)

Achte, verbesserte und vermehrte Auflage.

Essen,
Druck und Verlag von G. D. Bädeker.
1869.

Aus den Vorreden zu den früheren Auflagen

wird hier Folgendes wiederholt:

„Während in der Geometrie der Inhalt der Lehrsätze vermöge seiner Anschaulichkeit von den Schülern mit großer Leichtigkeit erfaßt wird, und so als alleinige Aufgabe das richtige Verständniß des Beweises übrig bleibt, bietet in der Arithmetik der abstractere Inhalt der Sätze und die Form der Beweisführung in allgemeinen Zeichen dem Anfänger eine zweifache Schwierigkeit dar. Da diese leichter und sicherer durch Theilung der Aufgabe überwunden wird, so scheint es dem Verfasser zweckmäßig, bei der ersten Einführung der Schüler in die wissenschaftliche Arithmetik hauptsächlich das richtige und sichere Erfassen der arithmetischen Wahrheiten zu erstreben und erst, nachdem der Anfänger durch eine hinreichende Uebung im Gebrauche der allgemeinen Zeichen sich eine gewisse Vertrautheit mit denselben erworben hat, die wissenschaftliche Form der Beweisführung durchgehends in Anwendung zu bringen. Aus dieser Rücksicht sind in dem ersten Abschnitte viele Sätze mit doppelten Beweisen versehen, von denen die mit einem Sternchen (*) bezeichneten, in der wissenschaftlichen Form geführten Beweise bei dem Unterrichte auf der untersten Stufe (Tertia) vorläufig übergangen und dann bei der Wiederholung in der nächsthöhern Classe (Secunda) durchgenommen werden können. Bei diesen Sätzen sind die Gründe, aus denen die Richtigkeit derselben in einer möglichst anschaulichen Weise erkannt werden kann, in den vorangeschickten Bemerkungen angegeben. — — — Auch in den späteren Abschnitten ist schwierigeren Sätzen, welche ohne Störung des Zusammenhanges beim ersten Unterrichte übergangen werden können, ein Sternchen (*) vorgesetzt."

„Da in der Mehrzahl der Gymnasien Ober- und Unter-Prima, ferner Ober- und Unter-Secunda combinirt sind und daher in diesen combinirten Classen zweijährige Lehrcursen stattfinden, während jährlich bei der Versetzung neue Schüler eintreten, so ist es geradezu unmöglich, allen Schülern die Abschnitte des Lehrbuchs nach der Reihenfolge desselben vorzuführen. Um die hiermit unvermeidlich verbundenen Uebelstände möglichst zu beseitigen, sind mit Ausnahme der drei ersten Abschnitte alle folgenden in der Art bearbeitet, daß dieselben bei einiger Nachhülfe des Lehrers auch ohne die Kenntniß der vorangehenden von den Schülern verstanden werden können. Nur die Bekanntschaft mit dem Inhalte der drei ersten Abschnitte ist für das Verständniß der folgenden unerläßlich."

Bei dieser neuen Auflage sind die Sätze über höhere, insbesondere cubische Gleichungen, welche so wie die Lehre von den unendlichen Reihen dem Unterrichtspensum der Realschulen angehören und nur ausnahmsweise in Gymnasien vorgetragen werden, ausgelassen und in eine bereits im Drucke begriffene Schrift verwiesen worden, welche demnächst unter dem Titel „Algebraische Analysis" erscheinen wird. An die Stelle der weggefallenen Sätze ist ein die Theorie der algebraischen Gleichungen betreffender Abschnitt getreten, in welchem die Vorschriften erörtert werden, welche bei der Umformung der Gleichungen zu beobachten sind, wenn die abgeleitete Gleichung mit der ursprünglichen gleichbedeutend sein soll. Die meisten arithmetischen Lehrbücher beschränken sich darauf, die Methoden anzuzeigen, deren man sich bei der Auflösung der Gleichungen zu bedienen pflegt, ohne auf die Untersuchung näher einzugehen, ob durch das angegebene Verfahren die Wurzeln der aufzulösenden Gleichung vollständig und nur diese, keine der Gleichung fremdartigen Wurzeln erhalten werden, was doch bekanntlich nur unter gewissen, nicht zu vernachlässigenden Bedingungen mit Sicherheit zu erwarten steht. Die wenigen Lehrbücher, welche diesen Gegenstand behandeln, halten sich, soweit dieselben dem Verfasser bekannt geworden sind, nicht frei von irrthümlichen Behauptungen. (Vergl. S. 154, so wie auch S. 112). In den §§. 198 bis 202 hat der Verfasser dahin gestrebt, diesen Gegenstand gründlich zu erledigen; sollte derselbe ebenfalls an irgend einer Stelle fehlgegriffen haben, so wird er Belehrung hierüber dankbarlichst annehmen.

Außer der besprochnen größeren Abänderung sind bei der neuen Auflage an verschiedenen Stellen Verbesserungen oder Ergänzungen angebracht, insbesondere die Uebungsaufgaben vermehrt worden.

Soest, im April 1869.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

§. 1. Erklärung.

Die Mathematik ist die Lehre von den Größen. Größe wird dasjenige genannt, was aus gleichartigen Theilen besteht. Die Größen sind von zweierlei Art, continuirliche oder räumliche und discrete oder Zahlengrößen. Die Theile der räumlichen Größen (Körper, Fläche und Linie) werden unter sich zusammenhängend im Raume vorgestellt, die Theile der Zahlengrößen werden gesondert in der Zeit vorgestellt.

Die Mathematik zerfällt hiernach in zwei Theile, in die Arithmetik, welche von den Zahlengrößen, und in die Geometrie, welche von den räumlichen Größen handelt.

§. 2. Erklärung.

Eine Zahlengröße oder Zahl ist eine bestimmte Menge gleichartiger oder gleichbenannter Dinge. Dasjenige Ding, dessen Menge durch die Zahl bestimmt wird, heißt Einheit.

Die Zahlen sind entweder benannt, wenn zugleich die Art der gezählten Dinge angegeben wird, oder unbenannt, wenn diese Angabe fehlt. Die Einheit der unbenannten Zahlen heißt Eins und wird mit 1 bezeichnet.

Die reine Arithmetik oder Arithmetik im engeren Sinne, mit welcher wir es hier zunächst zu thun haben, handelt nur von den unbenannten Zahlen.

Gleichartig ist dasjenige, woran wir nur die übereinstimmenden Merkmale berücksichtigen. Thaler und Groschen sind gleichartig, wenn wir nur auf die in dem Begriffe Geldstücke enthaltenen Merkmale Rücksicht nehmen; sie sind ungleichartig, wenn wir zugleich ihren Werth in Betracht ziehen.

Erster Abschnitt.

Von den vier Species in absoluten ganzen Zahlen.

§. 3. Erklärung.

Zwei Zahlen auf eine bestimmte Weise so verbinden, daß hierdurch eine dritte Zahl hervorgeht, heißt rechnen. Man unterscheidet hauptsächlich vier Rechnungsarten, welche die Grundlage aller andern Rechnungsarten bilden, und nennt dieselben die vier Species.

§. 4. Erklärung.

Für alle Rechnungsarten gibt es bestimmte Gesetze, welche nicht bloß für gewisse, sondern für alle Zahlen gelten. Um nun anzudeuten, daß nicht gerade eine bestimmte, sondern irgend eine willkürliche Zahl gedacht werden soll, bedient man sich der kleinen lateinischen Buchstaben a, b, c . . . und bezeichnet mit diesen Buchstaben unbestimmte Zahlen; d. h. man kann sich bei jedem dieser Buchstaben jede beliebige Zahl denken. Wenn aber einer dieser Buchstaben in irgend einer Verbindung wiederholt gesetzt wird, so ist allemal angenommen, daß dieser Buchstabe, so oft er sich findet, immer wieder die nämliche Zahl bezeichnet.

§. 5. Erklärung.

Wenn zwei Zahlzeichen, z. B. a und b, die nämliche Zahl bedeuten sollen, so wird dieses in folgender Art

$$a = b$$

(lies: a = b) ausgedrückt. Man nennt diese Verbindung zweier Zahlzeichen eine Gleichung. Die durch das Gleichheitszeichen (=) verbundenen Ausdrücke (a und b) heißen die Seiten der Gleichung.

A. Addition.

§. 6. Erklärung.

Zwei Zahlen addiren heißt eine dritte Zahl finden, welche so viel Einheiten enthält, als die beiden gegebenen Zahlen zusammen. Die zur Addition gegebenen Zahlen heißen die Summanden, und die durch die Addition derselben hervorgehende Zahl wird Summe genannt. Die Summe der beiden Summanden a und b wird bezeichnet durch

$$a + b.$$

Dieser Ausdruck bedeutet also diejenige Zahl, welche so viel Einheiten enthält, als a und b zusammen.

§. 7. Zusatz.

Man kann auch mehr als zwei Zahlen addiren, indem man nämlich zur Summe von zweien die dritte addirt, zur entstandenen Summe die vierte u. s. w. In welcher Ordnung man aber auch die gegebenen Zahlen addiren mag, so erhält man doch jedesmal die nämliche Zahl zur Summe, nämlich diejenige, welche so viel Einheiten enthält, als alle gegebenen Zahlen zusammen.

Man spricht diese Regel gewöhnlich kurz dahin aus: die Ordnung der Summanden ist gleichgiltig.

§. 8. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden §. folgt die Richtigkeit der Gleichung:

$$(a + b) + c = (a + c) + b,$$

welche sich in Worten noch auf folgende Art aussprechen läßt:

1) Eine Zahl (c) wird zu einer Summe (a + b) addirt, wenn man sie zu dem einen Summanden (a) addirt.

2) Eine Summe (a + b) wird zu einer Zahl (c) addirt, wenn man erst den einen Summanden (a) zu der Zahl (c) addirt und zu der entstandenen Summe (a + c) den andern Summanden (b) ebenfalls addirt.

Man macht von diesen Regeln in der gemeinen Rechenkunst häufigen Gebrauch. Wenn man z. B. zu der Summe 25 = 20 + 5 die Zahl 3 addiren soll, so addirt man dieselbe (nach der Regel 1) zu dem einen Summanden 5 und erhält so 20 + (5 + 3) = 20 + 8 = 28. In ähnlicher Art wird die nämliche Regel in dem folgenden Beispiele: 46 + 30 = 76 angewendet. — Soll man ferner zu der Zahl 345 die Summe 38 = 30 + 8 addiren, so addirt man (nach der Regel 2) erst 345 + 30 = 375 und dann weiter 375 + 8 = 383.

§. 9. Erklärung.

Eine Zahl heißt größer, als eine andere, wenn es eine dritte Zahl gibt, welche, zu der letzteren addirt, die erstere zur Summe gibt. Ist a größer, als b, so wird dieses in folgender Art ausgedrückt:

$$a > b \text{ oder } b < a$$

(lies: a größer als b, oder b kleiner als a). Man nennt diese Zusammenstellung eine Ungleichung.

Wir nennen z. B. die Zahl 8 größer als 5, weil eine dritte Zahl 3 zu 5 addirt 8 zur Summe gibt.

*§. 10. Lehrsatz.

Gleiches, zu Größerem addirt, gibt Größeres, in Zeichen:

Ist $a > b$,

so ist auch $a + c > b + c$.

Beweis. Da $a > b$ vorausgesetzt ist, so muß es eine dritte Zahl geben, welche, zu b addirt, a gibt. Heißt diese Zahl x, so ist

$$a = b + x,$$

folglich, wenn man beiderseits b addirt,

$$a + c = b + x + c,$$

oder da die Ordnung der Summanden gleichgiltig ist,

$$a + c = b + c + x,$$

also

$$a + c > b + c,$$

weil man zu b + c noch die Zahl x addiren muß, um a + c zu erhalten.

Bemerkung.

Wenn in der Gleichung $a + b = c$ die beiden Summanden a und b gegeben sind, so findet man die Summe c durch Addition. Man kann sich jedoch auch die Summe c selbst und den einen Summanden a als gegeben, den andern Summanden b aber als gesucht denken. Dies führt zu der folgenden Species.

B. Subtraction.

§. 11. Erklärung.

Eine Zahl von einer anderen subtrahiren heißt eine dritte Zahl finden, welche, zu der letzteren addirt, die erstere zur Summe gibt. Soll von der

Zahl a die Zahl b subtrahirt werden, so heißt a Minuend, b Subtrahend und die durch Subtraction gefundene Zahl Differenz. Man bezeichnet diese Differenz durch

$$a - b$$

und versteht hierunter also diejenige Zahl, welche, zu b addirt, a zur Summe gibt.

*§. 12. Zusatz.

Vermöge §. 9 kann der Ausdruck $a - b$ nur dann wirklich wieder eine Zahl bedeuten, wenn $a > b$ ist. So oft daher in den folgenden Paragraphen dieses Abschnitts von einer Differenz die Rede ist, ist allemal angenommen, daß der Minuend derselben größer als der Subtrahend ist. Unter dieser Voraussetzung wird durch eine Differenz jedesmal eine und auch nur eine einzige Zahl vorgestellt, da verschiedene Zahlen, zu derselben Zahl (dem Subtrahenden) addirt, vermöge §. 10 nicht die nämliche Zahl (den Minuenden), sondern ungleiche Zahlen zur Summe geben.

*§. 13. Zusatz.

Zufolge der vorstehenden Erklärung (§. 11) sagt die Gleichung

$$1)\ a - b = c$$

nichts anders aus, als daß

$$2)\ c + b = a$$

ist. Kann man daher die Gleichung (2) erweisen, so ist hiermit auch die Gleichung (1) als richtig dargethan. (So ist z. B. $12 - 7 = 5$, weil $5 + 7 = 12$ ist.)

Wenn man in die Gleichung (2) den Werth von $c = a - b$ aus der Gleichung (1) einsetzt, so verwandelt sich dieselbe in

$$(a - b) + b = a;$$

und wenn man in die Gleichung (1) den Werth von $a = c + b$ aus der Gleichung (2) einsetzt, so geht dieselbe über in

$$(c + b) - b = c.$$

Bemerkung.

Da Addition und Subtraction offenbar entgegengesetzte Operationen sind und sich daher gegenseitig aufheben, so ergeben sich hieraus zunächst folgende Sätze:

§. 14. Zusatz.

1) Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man von derselben die nämliche Zahl subtrahirt und zu der entstandenen Differenz wieder addirt, in Zeichen:

$$(a - b) + b = a.$$

2) Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man zu derselben die nämliche Zahl addirt und von der entstandenen Summe wieder subtrahirt, in Zeichen:

$$(a + b) - b = a.$$

*Der wissenschaftliche Beweis dieser beiden Gleichungen ist bereits in §. 13 geführt worden. — Man kann dieselben in Worten auch noch also aussprechen:

1) Wenn man zu einer Differenz $(a - b)$ den Subtrahenden (b) addirt, so erhält man den Minuenden (a).

2) Wenn man von einer Summe $(a + b)$ den einen Summanden (b) subtrahirt, so erhält man den andern Summanden (a).

Auf den Regeln des vorhergehenden §. beruht die Probe der Addition und der Subtraction.

Bemerkung.

In §. 8 haben wir gesehen, daß eine Zahl zu einer Summe addirt wird, wenn man sie zu dem einen Summanden addirt; da nun die Subtraction die entgegengesetzte Operation von der Addition ist, so schließen wir hieraus weiter die Richtigkeit des folgenden Satzes.

§. 15. Lehrsatz.

Eine Zahl wird von einer Summe subtrahirt, wenn man sie von dem einen Summanden subtrahirt, in Zeichen:

$$(a + b) - c = (a - c) + b.$$

*Wissenschaftlicher Beweis. Nach §. 13 sagt die vorstehende Gleichung nichts anders aus, als daß

$$(a - c) + b + c = a + b$$

ist. Da die Summe $(a - c) + b + c$ aus drei Summanden besteht, so können wir die Regel anwenden: die Ordnung der Summanden ist gleichgiltig, und also ordnen

$$(a - c) + c + b.$$

Statt $(a - c) + c$ können wir kürzer a setzen; denn nach §. 14 bleibt eine Zahl ungeändert, wenn man von ihr eine andere subtrahirt und die nämliche Zahl addirt; hiernach verwandelt sich der ganze Ausdruck in

$a + b$, w. z. b. w.

Von diesem Satze macht man in der gemeinen Rechenkunst Gebrauch in Exempeln folgender Art: $27 - 4 = 23$; $83 - 20 = 63$ u. dgl. m.

§. 16. Zusatz.

Wenn wir die Gleichung des vorhergehenden §.

$$(a + b) - c = (a - c) + b$$

rückwärts lesen, so ergibt sich aus derselben noch folgende Regel: Eine Zahl (b) wird zu einer Differenz (a — c) addirt, wenn man sie zum Minuenden (a) addirt.

Bemerkung.

Da die Subtraction gerade das Entgegengesetzte der Addition ist, so geht aus der eben aufgeführten Regel weiter der folgende Satz hervor.

§. 17. Lehrsatz.

Eine Zahl wird von einer Differenz subtrahirt, wenn man sie vom Minuenden subtrahirt, in Zeichen:

$$(a - b) - c = (a - c) - b.$$

*Wiss. Bew. Es ist hier zu beweisen, daß

$$[(a - c) - b] + c = a - b$$

ist. Auf die Summe

$$[(a - c) - b] + c$$

wenden wir die Regel (des §. 16) an:

Eine Zahl c wird zu einer Differenz $(a - c) - b$ addirt, wenn man sie zum Minuenden $a - c$ addirt. Wir können daher für den obigen Ausdruck auch setzen

$$[(a - c) + c] - b;$$

und hierfür, da $(a - c) + c = a$ (nach §. 14) ist,

$a - b$, w. z. b. w.

§. 18. Zusatz.

Am bequemsten für die praktische Anwendung werden die Regeln, welche in den beiden Gleichungen (der §§. 15—17)

$$(a + b) - c = (a - c) + b$$

und

$$(a - b) - c = (a - c) - b$$

enthalten sind, in folgender Art ausgesprochen:

Wenn man zu einer Zahl (a) eine andere (b) addiren und eine dritte (c) davon subtrahiren soll, oder wenn man von einer Zahl (a) zwei andere (b und c) nach einander subtrahiren soll, so ist es einerlei, in welcher Ordnuug man dies thut.

Bemerkung.

Nach §. 8, 2 wird eine Summe zu einer Zahl addirt, wenn man erst den einen Summanden zu der Zahl addirt und zu der entstandenen Summe den anderen Summanden ebenfalls addirt. Dies führt uns weiter zu dem folgenden Satze.

§. 19, a. Lehrsatz.

Eine Summe wird von einer Zahl subtrahirt, wenn man erst den einen Summanden von der Zahl subtrahirt und von der entstandenen Differenz den andern Summanden ebenfalls subtrahirt, in Zeichen:

$$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

*Wiss. Bew. Es ist hier zu beweisen, daß

$$[(a - b) - c] + b + c = a$$

ist. Die Summe

$$[(a - b) - c] + b + c$$

besteht aus den drei Summanden (a — b) — c und b und c. Da nun die Ordnung der Summanden gleichgiltig ist, so können wir auch dafür setzen

$$[(a - b) - c] + c + b.$$

Nach §. 14 können wir statt $[(a - b) - c] + c$ kürzer $a - b$ setzen; hiernach verwandelt sich der ganze Ausdruck in

$$(a - b) + b,$$

wofür wir nach derselben Regel auch kürzer setzen können

$$a.$$

Die Regel des letzten §. wendet man in der gemeinen Rechenkunst in Exempeln folgender Art an:

$$80 - 36 = (80 - 30) - 6 = 50 - 6 = 44.$$

§. 19, b. Zusatz.

Der letzte Lehrsatz gilt auch für eine Summe aus mehr, als zwei Summanden. Es wird nämlich eine Summe aus mehreren Summanden von einer Zahl subtrahirt, wenn man die einzelnen Summanden nach der Reihe subtrahirt, so ist z. B.

1) $a - (b + c + d) = [(a - b) - c] - d.$

2) $a - (b + c + d + e) = ([(a - b) - c] - d) - e$ u. s. w.

Bew. zu 1. Der Ausdruck

$$a - (b + c + d)$$

läßt sich auch, indem man zwei Summanden b und c in einen vereinigt, so schreiben

$$a - [(b + c) + d].$$

In §. 19, a. ist schon erwiesen, daß eine Summe aus zwei Summanden $(b + c) + d$ von einer Zahl a subtrahirt wird, wenn man erst den einen

Summanden $b + c$ und dann auch den andern Summanden d subtrahirt. Hiernach kann man für den obigen Ausdruck auch setzen

$$[a - (b + c)] - d.$$

Nach demselben §. ist $a - (b + c) = (a - b) - c$; also ist der ganze Ausdruck $= [(a - b) - c] - d$, w. z. b. w.

Der Beweis von (2) wird in ganz ähnlicher Art erhalten, indem man drei Summanden in einen vereinigt u. s. w.

Von dieser Regel macht man unter andern Gebrauch bei folgendem Exempel:

$600 - 258 = [(600 - 200) - 50] - 8 = (400 - 50) - 8 = 350 - 8 = 342.$

§. 20. Zusatz.

Wenn wir die Gleichung des §. 19, a.

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

rückwärts lesen, so ergibt sich noch folgende Regel:

Eine Zahl (c) wird von einer Differenz (a — b) subtrahirt, wenn man sie zum Subtrahenden (b) addirt.

Bemerkung.

Da die Subtraction gerade das entgegengesetzte Verfahren von der Addition ist, so führt die letzte Regel weiter zu dem folgenden Satze.

§. 21. Lehrsatz.

Eine Zahl wird zu einer Differenz addirt, wenn man sie vom Subtrahenden subtrahirt, in Zeichen:

$$(a - b) + c = a - (b - c).$$

*Wiss. Bew. Da in der vorstehenden Gleichung die rechte Seite $a - (b - c)$ eine Differenz ist, so muß die Gleichung richtig sein, wenn sich zeigen läßt, daß

$$(a - b) + c + (b - c) = a$$

ist. Die Summe $(a - b) + c + (b - c)$ können wir, da die Ordnung der Summanden gleichgiltig ist, auch so schreiben:

$$(a - b) + (b - c) + c.$$

Nach §. 14 ist aber dieser Ausdruck

$$= (a - b) + b$$
$$= a.$$

§. 22. Zusatz.

Wenn wir die Gleichung des vorhergehenden §.

$$(a - b) + c = a - (b - c)$$

rückwärts lesen, so erhalten wir die folgende Regel:

Eine Differenz (b — c) wird von einer Zahl (a) subtrahirt, wenn man den Minuenden (b) von der Zahl (a) subtrahirt und den Subtrahenden (c) zur entstandenen Differenz addirt.

Diese Regel wendet man unter andern in folgendem Exempel an:

$400 - 99 = 400 - (100 - 1) = (400 - 100) + 1 = 300 + 1 = 301.$

Bemerkung.

In den vorhergehenden Sätzen ist die Beantwortung aller Fragen, welche in der Subtraction gestellt werden können, enthalten. Während nämlich in der Addition überhaupt nur der eine Fall erörtert werden kann, daß in einer Summe ein Summand wieder eine Summe ist, welcher durch die Regel: die Ordnung der Summanden ist gleichgiltig, erledigt wird, sind in der

Subtraction vier Hauptfälle zu berücksichtigen, nämlich mit den beigesetzten Paragraphenzahlen folgende:

1) Wenn der Minuend eine Summe ist, §. 15.
2) Wenn der Minuend eine Differenz ist, §. 17.
3) Wenn der Subtrahend eine Summe ist, §. 19.
4) Wenn der Subtrahend eine Differenz ist, §. 21.

Die nun noch folgenden §§. enthalten besondere Anwendungen der vorhergehenden Hauptlehrsätze.

§. 23. Lehrsatz.

Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man zum Minuenden und Subtrahenden dieselbe Zahl addirt oder davon subtrahirt, in Zeichen:

$$1)\ a - b = (a + m) - (b + m),$$
$$2)\ a - b = (a - m) - (b - m).$$

Bew. zu 1. Wenn man zum Minuenden a die Zahl m addirt, so wird dieselbe nach §. 16 zur Differenz addirt, und wenn man die nämliche Zahl m zum Subtrahenden b addirt, so wird dieselbe nach §. 20 von der Differenz subtrahirt, folglich bleibt, wenn man beides thut, nach §. 14 die Differenz unverändert.

Der Beweis von (2) ergibt sich in ganz ähnlicher Art aus §. 17 und 21.

§. 24. Zusatz.

Wenn man die beiden Gleichungen des vorhergehenden §.

$$1)\ a - b = (a + m) - (b + m)$$

und

$$2)\ a - b = (a - m) - (b - m)$$

rückwärts liest, so erhält man weiter folgende Regeln:

1) Wenn man zwei Summen, welche einen gleichen Summanden haben, von einander subtrahiren soll, so kann man den gleichen Summanden weglassen; und

2) wenn man zwei Differenzen, welche einen gleichen Subtrahenden haben, von einander subtrahiren soll, so kann man den gleichen Subtrahenden weglassen.

Von der ersten Regel macht man unter andern Gebrauch in folgendem Exempel:

$$78 - 73 = 8 - 3 = 5.$$

§. 25. Lehrsatz.

Zwei Differenzen werden addirt, wenn man ihre Minuenden und ihre Subtrahenden addirt und die letztere Summe von der erstern subtrahirt, in Zeichen:

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$

Bew. Wenn man in der Summe

$$(a - b) + (c - d)$$

nur den einen Summanden c — d als Differenz berücksichtigt, so läßt sich die Regel anwenden: Eine Zahl a — b wird zu einer Differenz c — d addirt, wenn man sie zum Minuenden c addirt. Hiernach erhält man für den obigen Ausdruck $[(a - b) + c] - d$.

Nach derselben Regel ist $(a - b) + c = (a + c) - b$; also ist der ganze Ausdruck gleich $[(a + c) - b] - d$.

Wendet man nun die Regel an: Eine Zahl d wird von einer Differenz (a + c) — b subtrahirt, wenn man sie zum Subtrahenden b addirt, so erhält man endlich $(a + c) - (b + d)$, w. z. b. w.

Man kann auch im Beweise von der zuletzt erhaltenen Differenz

$$(a + c) - (b + d)$$

ausgehen und dieselbe mit Hilfe früherer Sätze in die Summe

$$(a - b) + (c - d)$$ verwandeln.

§. 26. Zusatz.

Die Regel des vorhergehenden §. gilt auch, wenn drei oder mehr Differenzen addirt werden sollen.

Bew. Es seien zunächst drei Differenzen zu addiren:

$$(a - b) + (c - d) + (f - g).$$

Nach dem vorhergehenden §. ist $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$, also der ganze Ausdruck gleich

$$[(a + c) - (b + d)] + (f - g),$$

und nach demselben §. ist dieser Ausdruck gleich

$$(a + c + f) - (b + d + g),$$ w. z. b. w.

In ähnlicher Art kann dasselbe erwiesen werden, wenn vier oder mehr Differenzen addirt werden sollen.

Zur weiteren Uebung kann auch das Aufsuchen der Beweise für folgende Gleichungen dienen:

$$a - (a - b) = b$$
$$(m - a) - (m - b) = b - a$$
$$(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d)$$
$$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$$ u. dgl. m.

C. Multiplication.

§. 27. Erklärung.

Mit einer Zahl a eine andere b multipliciren heißt die letztere so oft addiren, als die erstere anzeigt. Die Zahl b, welche mehrmals addirt wird, heißt Multiplicandus, und die Zahl a, welche anzeigt, wie oft dieses geschieht, wird Multiplicator genannt. Die durch Multiplication gefundene Zahl erhält den Namen Product. Ist a der Multiplicator und b der Multiplicandus, so wird das Produkt geschrieben

$a \,.\, b$ oder $a \times b$ oder auch bloß $a\,b$*).

Dieser Ausdruck bedeutet also die Zahl, welche entsteht, wenn man den Multiplicandus b so oft addirt, als der Multiplicator a anzeigt.

§. 28. Zusatz.

Aus der vorhergehenden Erklärung folgt:

1) Jedes Product läßt sich in eine Summe aus gleichen Summanden verwandeln, indem man den Multiplicandus so oft addirt**), als der Multiplicator a anzeigt, so ist z. B.

$$5 \,.\, a = a + a + a + a + a.$$

2) Eine Summe aus gleichen Summanden läßt sich in ein Product verwandeln, indem man den gleichen Summanden zum Multiplicandus und die Anzahl derselben zum Multiplicator macht, so ist z. B. $b + b + b = 3 \,.\, b$.

---

*) a b heißt also nicht a + b, sondern a . b, eine Verwechslung, vor welcher sich der Anfänger wohl zu hüten hat.

**) Genauer: so oft als Summanden setzt.

§. 29. Lehrsatz.

In jedem Producte lassen sich Multiplicator und Multiplicandus vertauschen, in Zeichen:

$$a . b = b . a.$$

Bew. Wir wollen statt der unbestimmten Zahlen a und b zunächst zwei bestimmte Zahlen 3 und 4 setzen und also zeigen, daß

$$3 . 4 = 4 . 3$$

ist. Wir zerfällen hierzu den Multiplicandus 4 in seine Einheiten und schreiben diese 4 Einheiten 3mal hin:

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Nun stehen in wagerechter Reihe 4 Einheiten, und solcher Reihen sind 3 vorhanden; und in lothrechter stehen drei Einheiten, und solcher Reihen sind 4 vorhanden.

Indem wir also die vier Einheiten dreimal hingeschrieben haben, haben wir auch zugleich die drei Einheiten viermal hingeschrieben; folglich ist

$$3 . 4 = 4 . 3.$$

Da sich dasselbe eben so auch für alle andern Zahlen erweisen läßt, so können wir folglich ganz allgemein setzen

$$a . b = b . a.$$

§. 30. Erklärung.

Da sich in einem Producte Multiplicator und Multiplicandus vertauschen lassen, so gibt man denselben auch den gemeinschaftlichen Namen: Factoren.

§. 31, a. Lehrsatz.

Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jeden Summanden mit der Zahl multiplicirt und die entstandenen Producte addirt, in Zeichen:

$$a . (b + c) = a . b + a . c.$$

Bew. Wir setzen zunächst statt a eine bestimmte Zahl, z. B. 4 und erhalten so das Product $4 . (b + c)$.

Wir verwandeln dieses Product nach §. 28 in eine Summe aus gleichen Summanden, indem wir den Multiplicandus $b + c$ viermal addiren, also

$$b + c + b + c + b + c + b + c.$$

Weil aber die Ordnung der Summanden gleichgiltig ist, so können wir auch so ordnen:

$$b + b + b + b + c + c + c + c.$$

Statt $b + b + b + b$ können wir kürzer $4 . b$ und statt $c + c + c + c$ kürzer $4 . c$ setzen; hiernach erhalten wir für den ganzen Ausdruck

$$4 . b + 4 . c.$$

Also ist $4 . (b + c) = 4 . b + 4 . c.$

Da dasselbe eben so erwiesen werden kann, wenn man statt des Multiplicators 4 irgend eine andere Zahl annimmt, so können wir auch ganz allgemein setzen: $a . (b + c) = a . b + a . c.$

Von dieser Regel macht man in der gemeinen Rechenkunst Gebrauch in Exempeln folgender Art: $3 . 32 = 96.$

§. 31, b. Zusatz.

Die vorhergehende Regel gilt auch dann noch, wenn eine Summe aus drei oder mehr Summanden mit einer Zahl multiplicirt werden soll.

Bew. Es sei zunächst das Product

$$a . (b + c + d)$$

gegeben, dessen einer Factor eine Summe aus drei Summanden ist.

Wenn wir zwei Summanden b und c in einen zusammenziehen, so verwandelt sich dieses Product in das folgende:

$$a . [(b + c) + d],$$

in welchem der zweite Factor $(b + c) + d$ eine Summe aus zwei Summanden $b + c$ und d ist. Wir können daher nach dem vorhergehenden §. für den obigen Ausdruck setzen $a . (b + c) + a . d$.

Statt $a . (b + c)$ können wir aber nach demselben §. auch $a . b + a . c$ setzen; dann erhalten wir für den ganzen Ausdruck

$$a . b + a . c + a . d,$$ w. z. b. w.

In ähnlicher Art kann das nämliche auch für eine Summe aus vier und mehr Summanden erwiesen werden.

Diesen Satz wendet man in folgendem Exempel an:

$$2 . 324 = 648.$$

§. 32. Lehrsatz.

Wenn wir die Gleichungen der beiden vorhergehenden §§.

$$a . (b + c) = a . b + a . c$$

und

$$a . (b + c + d) = a . b + a . c + a . d$$

rückwärts lesen, so ergibt sich noch folgende Regel: Mehrere Producte, welche einen gleichen Factor haben, werden addirt, wenn man die andern Factoren addirt und den gleichen Factor unverändert läßt.

Diese Regel wird in der gemeinen Rechenkunst in folgenden Exempeln angewendet: $50 + 30 = 5 . 10 + 3 . 10 = 8 . 10 = 80$, $200 + 400 + 300 = 2 . 100 + 4 . 100 + 3 . 100 = 9 . 100 = 900$ u. dgl. m.

§. 33. Zusatz.

Eine Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man den Minuenden und Subtrahenden mit der Zahl multiplicirt und das letztere Product von dem ersteren subtrahirt, in Zeichen:

$$a . (b - c) = a . b - a . c.$$

Bew. Wenn wir statt a eine bestimmte Zahl, z. B. 3 annehmen, so erhalten wir das Product $3 . (b - c)$.

Dieses Product können wir nach §. 28 ersetzen durch die Summe

$$(b - c) + (b - c) + (b - c)$$

In §. 26 haben wir gesehen, daß mehrere Differenzen addirt werden, wenn man ihre Minuenden und ihre Subtrahenden addirt und die letztere Summe von der ersteren subtrahirt. Wir können daher für den vorhergehenden Ausdruck auch setzen

$$(b + b + b) - (c + c + c)$$

oder kürzer $3 . b - 3 . c.$

Also ist $3 . (b - c) = 3 . b - 3 . c.$

Da das nämliche eben so erwiesen werden kann, wenn wir statt 3 irgend eine andere Zahl annehmen, so können wir auch ganz allgemein setzen:

$$a . (b - c) = a . b - a . c.$$

§. 34. Zusatz.

Wenn wir die so eben erwiesene Gleichung rückwärts lesen, so erhalten wir weiter folgende Regel:

Zwei Producte, welche einen gleichen Factor haben, werden von einander subtrahirt, wenn man die anderen Factoren von einander subtrahirt und den gleichen Factor stehen läßt.

Von dieser Regel macht man in der gemeinen Rechenkunst in folgendem Exempel Gebrauch:

$$60 - 40 = 6 . 10 - 4 . 10 = (6 - 4) . 10 = 2 . 10 = 20.$$

§. 35. Lehrsatz.

Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man einen Factor mit der Zahl multiplicirt, in Zeichen:

$$a . (b . c) = (a . b) . c.$$

Bew. Nehmen wir statt a eine bestimmte Zahl, z. B. 5 an, so erhalten wir das Product $5 . (b . c)$,
welches wir nach §. 28 in eine Summe aus gleichen Summanden verwandeln können: $b . c + b . c + b . c + b . c + b . c.$

In dieser Summe sind sämmtliche Summanden Producte mit dem gemeinschaftlichen Factor c. Wir addiren daher nach §. 32 die anderen Factoren b, b, b, .. und lassen den gleichen Factor c stehen, also

$$(b + b + b + b + b) . c$$

oder kürzer $(5 . b) . c.$

Demnach ist $5 . (b . c) = (5 . b) . c,$

und da dasselbe eben so für jeden andern Werth von a erwiesen werden kann, so können wir auch allgemein setzen:

$$a . (b . c) = (a . b) . c.$$

Diese Regel wird angewendet in der gemeinen Rechenkunst in folgendem Exempel:

$$3 . 400 = 3 . (4 . 100) = (3 . 4) . 100 = 12 . 100 = 1200.$$

§. 36. Zusatz.

Die Gleichung des vorhergehenden §. läßt sich auch so aussprechen: Eine Zahl (a) wird mit einem Producte (b . c) multiplicirt, wenn man sie erst mit dem einen Factor (b) multiplicirt und das entstandene Product (a . b) mit dem andern Factor (c) ebenfalls multiplicirt.

Von dieser Regel macht man in der Rechenkunst Gebrauch, wenn man eine Zahl mit einer andern, welche sich in Factoren zerfällen läßt, multipliciren soll. So läßt sich z. B. die Aufgabe $537 . 48 = 537 . 6 . 8$ auch so rechnen:

$$\begin{array}{r l} 537 & (6 \\ \hline 3222 & (8 \\ \hline 25776 & \end{array}$$

§. 37. Zusatz.

Wenn mehrere Zahlen zur Multiplication gegeben sind, so ist es einerlei, in welcher Ordnung man dieselben multiplicirt.

Bew. Sind zunächst die Zahlen a, b und c gegeben, so ist nach §§. 29 und 35 $(a . b) . c = (b . a) . c = (b . c) . a.$

Demnach kann a in dem Producte sowohl die erste, zweite als auch die dritte Stelle einnehmen; dasselbe kann eben so von den beiden andern Factoren b und c erwiesen werden.

Es seien ferner vier Factoren a, b, c und d gegeben, so ist wieder nach §§. 29 und 35

$$[(a . b) . c] . d = [(b . a) . c] . d = [(b . c) . a] . d = [(b . c) . d] . a.$$

So wie hiernach in dem Producte a jede beliebige Stelle einnehmen kann, so läßt sich dies auch von den drei andern Factoren b, c und d zeigen.

Auf ganz gleiche Weise läßt sich das nämliche darthun, wenn fünf und mehr Zahlen zur Multiplication gegeben sind.

Man spricht diese Regel gewöhnlich kurz so aus: Die Ordnung der Factoren ist gleichgiltig.

Bemerkung.

Diejenigen Fälle, welche in der Multiplication überhaupt in Betracht gezogen werden können, sind folgende: Es kann der Multiplicator eine Summe, eine Differenz und ein Product sein; und da das nämliche auch vom Multiplicandus gilt, so müßte die Multiplication überhaupt sechs Hauptsätze enthalten. Weil aber nach §. 29 sich Multiplicator und Multiplicandus vertauschen lassen, so reducirt sich die Zahl der möglichen Fälle auf drei, wonach in den vorhergehenden §§. 31, 33 und 35 die Beantwortung aller in der Multiplication möglichen Fragen und Aufgaben enthalten ist. Als einen häufige Anwendung findenden besondern Fall heben wir den in dem folgenden §. ausgesprochenen Satz hervor.

§. 38. Lehrsatz.

Zwei Summen werden mit einander multiplicirt, wenn man jeden Summanden der einen mit jedem Summanden der andern multiplicirt und die entstandenen Producte addirt, so ist z. B.

$$(a + b . (c + d + f) = a . c + b . c + a . d + b . d + a . f + b . f.$$

Bew. In dem Producte

$$(a + b) . (c + d + f)$$

sind beide Factoren Summen. Wenn wir aber zunächst nur den einen Factor $c + d + f$ als Summe berücksichtigen, so können wir die Regel anwenden: Eine Summe $c + d + f$ wird mit einer Zahl $a + b$ multiplicirt, wenn man jeden Summanden mit der Zahl multiplicirt und die entstandenen Producte addirt. Hiernach erhalten wir für den obigen Ausdruck

$$(a + b) . c + (a + b) . d + (a + b) . f.$$

Nun ist aber nach derselben Regel

$$(a + b) . c = a . c + b . c,$$
$$(a + b) . d = a . d + b . d \text{ und}$$
$$(a + b) . f = a . f + b . f;$$

also ist der ganze Ausdruck gleich

$$a . c + b . c + a . d + b . d + a . f + b . f, \text{ w. z. b. w.}$$

Von dieser Regel macht man in der gemeinen Rechenkunst Gebrauch, wenn man zwei mehrziffrige Zahlen, z. B. 27 und 854 mit einander multiplicirt.

***§. 39. Lehrsatz.**

Gleiches, mit Größerem multiplicirt, gibt Größeres, in Zeichen:

$$\frac{a > b}{a . c > b . c.}$$

Bew. Nach der Voraussetzung und §. 9 setzen wir

$$a = b + x.$$

Multipliciren wir beide Seiten dieser Gleichung mit c, so erhalten wir

$$a . c = (b + x) . c = b . c + c . x,$$

woraus

$$a . c > b . c$$

folgt, da das Product zweier Zahlen $c . x$ jedesmal wieder einer Zahl gleich ist.

Bemerkung.

Wenn wir uns in der Gleichung

$$a . b = c$$

das Product c und den einen Factor b als gegeben denken, so führt die Frage nach dem andern Factor a zu der folgenden Species.

D. Division.

§. 40. Erklärung.

Eine Zahl a durch eine andere b dividiren heißt eine dritte Zahl finden, welche, mit der letzteren multiplicirt, die erstere zum Product gibt. Die Zahl a, welche dividirt werden soll, wird Dividendus und die Zahl b, durch welche dividirt werden soll, wird Divisor genannt; die durch Division entstandene Zahl heißt Quotient. Ist a der Dividendus und b der Divisor, so wird der Quotient dieser beiden Zahlen geschrieben

$$a : b \text{ oder } \frac{a}{b}.$$

Dieser Ausdruck bedeutet also diejenige Zahl, welche, mit dem Divisor b multiplicirt, den Dividendus a zum Producte gibt.

Statt der Benennungen Quotient, Dividendus und Divisor kann man sich auch der bequemeren Ausdrücke: Bruch, Zähler und Nenner bedienen.

In der gemeinen Rechenkunst wird zwar zwischen Bruch und Quotient unterschieden; die wissenschaftliche Arithmetik erkennt jedoch diesen Unterschied nicht an und gebraucht beide Benennungen in demselben Sinne.

*§. 41. Zusatz.

Während das Product zweier (ganzen) Zahlen jedesmal wieder einer (ganzen) Zahl gleich ist, kann man den Dividendus a und Divisor b nicht ganz willkürlich annehmen, wenn der Quotient $\frac{a}{b}$ wirklich wieder einer (ganzen) Zahl gleich sein soll. Dies ist nur dann der Fall, wenn der Dividendus einem Producte aus dem Divisor und irgend einer ganzen Zahl gleich ist, wie dies in diesem Abschnitte durchgehends vorausgesetzt wird. Daß aber unter dieser Bedingung ein Quotient nur einer einzigen Zahl gleich sein kann, geht leicht daraus hervor, daß nach §. 39 ungleiche Zahlen, mit der nämlichen Zahl (dem Divisor) multiplicirt, nicht dieselbe Zahl (den Dividendus), sondern ungleiche Zahlen zum Producte geben.

*§. 42. Zusatz.

Nach der obigen Erklärung (§. 40) sagt die Gleichung

$$1) \quad \frac{a}{b} = c$$

nichts anders aus, als daß $2) \; c . b = a$

ist. (So will z. B. die Gleichung $\frac{12}{4} = 3$ nichts anders besagen, als daß $3 . 4 = 12$ ist).

Wenn man in die Gleichung (2) den Werth von $c = \frac{a}{b}$ aus der Gleichung (1) einsetzt, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{a}{b} . b = a,$$

und wenn man in die Gleichung (1) den Werth von $a = c . b$ aus der Gleichung (2) einsetzt, so erhält man

$$\frac{c . b}{b} = c.$$

Bemerkung.

Da die Division offenbar das Umgekehrte der Multiplication ist und beide Operationen sich daher gegenseitig aufheben, so geht hieraus der folgende Satz hervor.

§. 43. Zusatz.

1) Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn sie mit der nämlichen Zahl dividirt und multiplicirt wird, in Zeichen:

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

2) Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie mit der nämlichen Zahl multiplicirt und dividirt, in Zeichen:

$$\frac{a \cdot b}{b} = a.$$

*Der wissenschaftliche Beweis dieser beiden Gleichungen ist bereits im vorhergehenden Paragraphen geführt worden. In Worten lassen sich dieselben auch noch also aussprechen:

1) Wenn man einen Quotienten $\left(\frac{a}{b}\right)$ mit seinem Divisor (b) multiplicirt, so erhält man den Dividendus (a).

2) Wenn man ein Product (a . b) durch den einen Factor (b) dividirt, so erhält man den andern Factor (a).

Auf den beiden vorhergehenden Regeln beruht die Probe der Multiplication und Division.

Bemerkung.

Da die Division die umgekehrte Operation von der Multiplication ist, so werden sich im allgemeinen die Sätze der Division aus denen der Multiplication ergeben, wenn man, wo dort multiplicirt ist, hier dividirt. Wenden wir dieses Verfahren zunächst auf §. 31 an, nach welchem eine Summe mit einer Zahl multiplicirt wird, wenn man jeden Summanden mit der Zahl multiplicirt, so geht der folgende Satz hervor.

§. 44. Lehrsatz.

Eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jeden Summanden durch die Zahl dividirt, in Zeichen:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

*Wissensch. Bew. Nach §. 42 sagt die vorstehende Gleichung nichts anders aus, als daß

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) . c = a + b$$

ist. Auf das Product $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) . c$

wenden wir die Regel des §. 31 an und erhalten:

$$\frac{a}{c} . c + \frac{b}{c} . c.$$

Da aber eine Zahl ungeändert bleibt, wenn sie durch die nämliche Zahl multiplicirt und dividirt wird, so können wir statt $\frac{a}{c} . c$ kürzer a und statt $\frac{b}{c} . c$ kürzer b setzen. Hiernach verwandelt sich der ganze Ausdruck in

a + b, w. z. b. w.

Von diesem Satze macht man in der gemeinen Rechenkunst bei Exempeln folgender Art Gebrauch:

$$\frac{96}{3} = \frac{90 + 6}{3} = \frac{90}{3} + \frac{6}{3} = 30 + 2 = 32.$$

§. 45. Zusatz.

Dieselbe Regel gilt auch, wenn eine Summe aus drei oder mehr Summanden durch eine Zahl dividirt werden soll; so ist z. B.

$$\frac{a + b + d}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{d}{c}.$$

Der Beweis ist derselbe wie bei §. 31, b. in der Multiplication.

§. 46. Zusatz.

Wenn wir die Gleichungen der vorhergehenden §§.

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\frac{a + b + d}{e} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{d}{c}$$

u. s. w. rückwärts lesen, so erhalten wir noch folgende Regel:

Brüche mit gleichem Nenner werden addirt, wenn man ihre Zähler addirt.

Bemerkung.

In §. 33 haben wir gesehen, daß eine Differenz mit einer Zahl multiplicirt wird, wenn man den Minuenden und Subtrahenden mit der Zahl multiplicirt. Da nun die Division gerade das Umgekehrte der Multiplication ist, so geht hieraus weiter der folgende Satz hervor.

§. 47. Lehrsatz.

Eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den Minuenden und Subtrahenden durch die Zahl dividirt, in Zeichen:

$$\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

*Wissensch. Bew. Es ist hier zu beweisen, daß

$$\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) . c = a - b$$

ist. Auf das Product $\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) . c$

wenden wir die Regel des §. 33 an und erhalten

$$\frac{a}{c} . c - \frac{b}{c} . c,$$

und hierfür setzen wir nach §. 43 kürzer

$$a - b, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 48. Zusatz.

Aus der Gleichung des vorhergehenden §.

$$\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

ergibt sich auch noch folgende Regel:

Brüche mit gleichem Nenner werden von einander subtrahirt, wenn man ihre Zähler von einander subtrahirt.

Bemerkung.

Nach §. 35 wird ein Product mit einer Zahl multiplicirt, wenn man einen Faktor mit derselben multiplicirt. Aus der Umkehrung dieser Regel geht der folgende Satz hervor.

§. 49. Lehrsatz.

Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, wenn man einen Factor durch dieselbe dividirt, in Zeichen:

$$\frac{a \,.\, b}{c} = \frac{a}{c} \,.\, b.$$

*Wissensch. Bew. Es ist hier zu beweisen, daß

$$\left(\frac{a}{c} \,.\, b\right) . \, c = a \,.\, b$$

ist. Das Product

$$\left(\frac{a}{c} \,.\, b\right) . \, c$$

können wir, da die Ordnung der Factoren gleichgiltig ist, auch so schreiben:

$$\left(\frac{a}{c} \,.\, c\right) . \, b,$$

und hierfür setzen wir nach §. 43 kürzer

$$a \,.\, b.$$

Diese Regel wird in der gemeinen Rechenkunst in folgendem Exempel angewendet:

$$\frac{60}{3} = \frac{6 \,.\, 10}{3} = \frac{6}{3} \,.\, 10 = 2 \,.\, 10 = 20;$$

ferner $\frac{1200}{4} = \frac{12 \,.\, 100}{4} = \frac{12}{4} \,.\, 100 = 3 \,.\, 100 = 300$ u. dgl. m.

§. 50. Zusatz.

Wenn wir die Gleichung des vorhergehenden §.

$$\frac{a \,.\, b}{c} = \frac{a}{c} \,.\, b$$

rückwärts lesen, so ergibt sich aus derselben noch folgende Regel:

Ein Bruch $\left(\frac{a}{c}\right)$ wird mit einer Zahl (b) multiplicirt, wenn man den Zähler (a) mit derselben multiplicirt.

Bemerkung.

Wie wir so eben gesehen haben, wird ein Bruch multiplicirt, wenn man seinen Zähler multiplicirt. Wir schließen hieraus weiter den folgenden Satz.

§. 51. Lehrsatz.

Ein Bruch wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den Zähler durch dieselbe dividirt, in Zeichen:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}.$$

*Wissensch. Bew. Es ist hier zu beweisen, daß

$$\left(\frac{a : c}{b}\right) . \, c = \frac{a}{b}$$

ist. Auf das Product $\left(\frac{a : c}{b}\right) . \, c$

läßt sich die Regel anwenden: Ein Bruch $\frac{a:c}{b}$ wird mit einer Zahl c multiplicirt, wenn man den Zähler a : c mit der Zahl c multiplicirt. Hierdurch verwandelt sich der obige Ausdruck in $\frac{(a:c).c}{b}$, wofür wir nach §. 43 auch kürzer setzen können $\frac{a}{b}$.

§. 52. Zusatz.

Die in den Gleichungen der nächst vorhergehenden §§. (49 — 51)

$$\frac{a.b}{c} = \frac{a}{c}.b$$

und

$$\frac{a}{b}:c = \frac{a:c}{b}$$

enthaltenen Regeln lassen sich für die praktische Anwendung am bequemsten in folgender Art aussprechen:

Wenn man eine Zahl (a) mit einer andern (b) multipliciren und durch eine dritte (c) dividiren soll, oder wenn man eine Zahl (a) durch zwei andere (b und c) nach einander dividiren soll, so ist es einerlei, in welcher Ordnung man dies thut.

Bemerkung.

In §. 36 haben wir gesehen, daß eine Zahl mit einem Producte multiplicirt wird, wenn man sie zuerst mit dem einen Factor multiplicirt und das entstandene Product mit dem andern Factor ebenfalls multiplicirt. Da nun die Division gerade die umgekehrte Operation von der Multiplication ist, so führt uns dies weiter zu dem folgenden Satze.

§. 53. Lehrsatz.

Eine Zahl wird durch ein Product dividirt, wenn man die Zahl erst durch den einen Factor dividirt und den entstandenen Quotienten durch den andern Factor ebenfalls dividirt, in Zeichen:

$$\frac{a}{b.c} = \frac{a}{b}:c.$$

*Wissensch. Bew. Es ist hier zu beweisen, daß

$$\left(\frac{a}{b}:c\right).b.c = a$$

ist. Das Product

$$\left(\frac{a}{b}:c\right).b.c$$

besteht aus den drei Factoren $\frac{a}{b}:c$ und b und c. Da nun die Ordnung der Factoren gleichgiltig ist, so können wir dasselbe auch so schreiben:

$$\left(\frac{a}{b}:c\right).c.b.$$

Statt $\left(\frac{a}{b}:c\right).c$ setzen wir nach §. 43 kürzer $\frac{a}{b}$; dann verwandelt sich der ganze Ausdruck in

$$\frac{a}{b}.b,$$

wofür wir nach demselben §. setzen

$$a.$$

Von dem eben erwiesenen Satze macht man in der Rechenkunst Gebrauch, wenn man eine Zahl durch eine andere dividiren soll, welche sich in Factoren zerfällen läßt; so kann man z. B. die Aufgabe 19152 : 56 = 19152 : (7 . 8) auch so rechnen:

$$\begin{array}{r} 7)\underline{19152} \\ 8)\underline{2736} \\ 342 \end{array}$$

§. 54 u. 55. Zusatz.

Dieselbe Regel gilt auch noch, wenn man eine Zahl durch ein Product aus drei oder mehr Factoren dividiren soll; so ist z. B. (zufolge des vorhergehenden §.)

$$a : (b . c . d) = a : [(b . c) . d] = [a : (b . c)] : d = [(a : b) : c] : d.$$

§. 56. Zusatz.

Wenn wir die Gleichung des §. 53

$$\frac{a}{b . c} = \frac{a}{b} : c$$

rückwärts lesen, so ergibt sich folgende Regel:

Ein Bruch $\left(\frac{a}{b}\right)$ wird durch eine Zahl (c) dividirt, wenn man den Nenner (b) mit der Zahl (c) multiplicirt.

Bemerkung.

Diese Regel führt uns weiter* zu dem folgenden Satze.

§. 57. Lehrsatz.

Ein Bruch wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man den Nenner durch die Zahl dividirt, in Zeichen:

$$\frac{a}{b} . c = \frac{a}{b : c}.$$

*Wissensch. Bew. Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Quotient. Wir haben daher nur nöthig zu zeigen, daß

$$\frac{a}{b} . c . (b : c) = a$$

ist. Das Produkt $\frac{a}{b} . c . (b : c)$

können wir, da die Ordnung der Factoren gleichgiltig ist, auch so schreiben:

$$\frac{a}{b} . (b : c) . c.$$

Statt (b : c) . c setzen wir kürzer b; dann erhalten wir für den ganzen Ausdruck $\frac{a}{b} . b$

oder kürzer a, w. z. b. w.

§. 58. Zusatz.

Aus der Gleichung des letzten §. ergibt sich noch folgende Regel:

Eine Zahl (a) wird durch einen Bruch b : c dividirt, wenn man dieselbe durch den Zähler (b) dividirt und mit dem Nenner (c) multiplicirt.

Bemerkung.

Da in einem Quotienten der Dividendus eine Summe, eine Differenz, ein Product und ein Quotient sein kann, da ferner das nämliche vom Divisor gilt, so ergeben sich für die Division überhaupt 8 Fälle, welche sich in Zeichen kurz so darstellen lassen:

$$1)\ \frac{a+b}{c} \quad 2)\ \frac{a-b}{c} \quad 3)\ \frac{a\,.\,b}{c} \quad 4)\ \frac{a}{b}:c$$

$$5)\ \frac{a}{b+c} \quad 6)\ \frac{a}{b-c} \quad 7)\ \frac{a}{b\,.\,c} \quad 8)\ \frac{a}{b:c}.$$

Von diesen 8 Fällen sind sechs (1, 2, 3, 4, 7 und 8) im Vorhergehenden wirklich erledigt; dagegen fehlen der 5te und 6te Fall. Der Grund dieser Auslassung ist, daß sich statt $\frac{a}{b+c}$ und $\frac{a}{b-c}$ kein anderer bequemerer Ausdruck setzen läßt*). — Die nun noch folgenden Sätze enthalten nützliche Anwendungen der vorhergehenden Hauptsätze.

§. 59. Lehrsatz.

Ein Bruch bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt, in Zeichen:

$$1)\ \frac{a}{b} = \frac{a\,.\,m}{b\,.\,m}$$

$$2)\ \frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}.$$

Beweis zu (1). Denn wenn man den Zähler a mit der Zahl m multiplicirt, so wird der Bruch nach §. 50 multiplicirt, und wenn man den Nenner b mit der Zahl m multiplicirt, so wird der Bruch nach §. 56 dividirt. Folglich ist der Bruch mit derselben Zahl multiplicirt und dividirt worden und also nach §. 43 ungeändert geblieben.

Der Beweis von (2) folgt eben so aus §§. 51 und 57.

§. 60. Zusatz.

Durch den vorhergehenden §. wird man in den Stand gesetzt, mehrere Brüche, z. B. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{f}{g}$ auf einen gleichen Nenner zu bringen. Hierzu sucht man zunächst einen Generalnenner, d. h. eine Zahl, in welcher alle gegebenen Nenner aufgehn. Man findet eine solche Zahl, wenn man die Nenner der gegebenen Brüche mit einander multiplicirt. Denn es ist klar, daß das Product b . d . g sich durch jeden der Factoren b, d und g dividiren läßt. Man bringt nun z. B. den Bruch $\frac{a}{b}$ auf den Generalnenner b . d . g, indem man mit dem Nenner b des gegebenen Bruchs in den Generalnenner b . d . g dividirt und den entstandenen Quotienten d . g mit dem Zähler a multiplicirt. Das Product a . d . g ist der gesuchte Zähler.

Man erhält hiernach $\frac{a}{b} = \frac{adg}{bdg}.$

Eben so findet man $\frac{c}{d} = \frac{bcg}{bdg}$ und $\frac{f}{g} = \frac{bdf}{bdg}.$

*) Die Aufgabe, eine Zahl durch eine Summe oder Differenz zu dividiren, wird in der höheren Arithmetik, der sogenannten Analysis, durch Entwicklung des Quotienten in eine unendliche Reihe erledigt.

Man macht von diesem Verfahren vorzüglich bei der Addition und Subtraction der Brüche Gebrauch, indem man dieselben zunächst auf gleichen Nenner bringt und dann vermöge §. 46 und 48 ihre Zähler addirt oder von einander subtrahirt.

§. 61. Zusatz.

Aus den Gleichungen des vorhergehenden §.:

$$1)\ \frac{a}{b} = \frac{a \,.\, m}{b \,.\, m} \text{ und } 2)\ \frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$$

ergeben sich auch noch folgende Regeln:

1) Wenn man zwei Producte, welche einen gleichen Factor haben, durch einander dividiren soll, so kann man den gleichen Factor weglassen.

2) Brüche mit gleichem Nenner werden durch einander dividirt, wenn man ihre Zähler durch einander dividirt.

3) Die letzte Regel kann man auch bei der Division solcher Brüche, welche ungleiche Nenner haben, anwenden, wenn man dieselben vorher nach §. 60 auf gleichen Nenner bringt; so ist z. B.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \,.\, d}{b \,.\, d} : \frac{b \,.\, c}{b \,.\, d} = a \,.\, d : b \,.\, c = \frac{a \,.\, d}{b \,.\, c}.$$

§. 62. Lehrsatz.

Zwei Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt, in Zeichen:

$$\frac{a}{b} \,.\, \frac{c}{d} = \frac{a \,.\, c}{b \,.\, d}.$$

Beweis. Auf das Product

$$\frac{a}{b} \,.\, \frac{c}{d}$$

läßt sich die Regel anwenden: Ein Bruch $\frac{c}{d}$ wird mit einer Zahl $\frac{a}{b}$ multiplicirt, wenn man den Zähler c multiplicirt. Hierdurch erhält man für den obigen Ausdruck

$$\frac{\frac{a}{b} \,.\, c}{d}$$

Nach derselben Regel ist aber $\frac{a}{b} \,.\, c = \frac{a \,.\, c}{b}$, also der ganze Ausdruck gleich

$$\frac{\frac{a \,.\, c}{b}}{d}$$

oder deutlicher geschrieben:

$$\frac{a \,.\, c}{b} : d.$$

Wendet man nun noch die Regel an: Ein Bruch $\frac{a \,.\, c}{b}$ wird durch eine Zahl d dividirt, wenn man den Nenner b mit der Zahl d multiplicirt, so erhält man für den vorhergehenden Ausdruck

$$\frac{a \,.\, c}{b \,.\, d}, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 63. Zusatz.

Dieselbe Regel gilt, wie leicht zu zeigen, auch dann, wenn mehr, als zwei Brüche zur Multiplication gegeben sind.

Bemerkung.

Wenn wir am Schlusse dieses Abschnittes noch einmal auf das gegenseitige Verhältniß der vier Species blicken, so zeigt sich, daß die drei andern Species wesentlich auf der Addition, als ihrer Grundlage, beruhen. Es entsteht nämlich die Multiplication durch das wiederholte Addiren derselben Zahl, und die Subtraction und Division geht durch Umkehrung der Addition und Multiplication hervor. Wir unterscheiden hiernach zwei directe Operationen, Addition und Multiplication, und zwei indirecte, Subtraction und Division.

Weiter unten werden wir noch eine dritte directe Operation, das Potenziren, welche durch wiederholtes Multipliciren derselben Zahl entsteht, und zwei indirecte, Radiciren und Logarithmiren, kennen lernen.

Als eine Folge des gegenseitigen Zusammenhanges der vier bis jetzt entwickelten Operationen heben wir noch hervor, daß sich jede richtige Additions- und Subtractionsgleichung in eine richtige Multiplications- oder Divisionsgleichung verwandelt, wenn man statt der Zeichen (+) und (—) beziehlich (.) und (:) schreibt, wie die folgende Zusammenstellung zeigt.

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$$

$$(a + b) - c = (a - c) + b, \qquad \frac{a \,.\, b}{c} = \frac{a}{c} \,.\, b$$

$$(a - b) - c = (a - c) - b, \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}$$

$$a - (b + c) = (a - b) - c, \qquad \frac{a}{b \,.\, c} = \frac{a}{b} : c$$

$$a - (b - c) = (a - b) + c, \qquad \frac{a}{b : c} = \frac{a}{b} \,.\, c$$

$$a - b = (a + m) - (b + m), \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \,.\, m}{b \,.\, m}$$

$$a - b = (a - m) - (b - m), \qquad \frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$$

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d), \qquad \frac{a}{b} \,.\, \frac{c}{d} = \frac{a \,.\, c}{b \,.\, d}.$$

Man erhält daher aus jedem Lehrsatze der Subtraction einen richtigen Satz der Division, wenn man statt addirt und subtrahirt beziehlich multiplicirt und dividirt, ferner statt Summe und Differenz beziehlich Product und Quotient und statt Summand, Minuend und Subtrahend beziehlich Factor, Dividend und Divisor setzt.

Anhang.

Das decadische Zahlensystem.

Die Reihe der Zahlen auf eine bestimmte Weise dargestellt, bildet ein Zahlensystem. Die zur Bezeichnung der Zahlen dienenden Zeichen heißen Ziffern. Je nachdem zur Bezeichnung einer Zahl nur eine einzige Ziffer angewendet wird oder mehrere mit einander verbunden werden, unterscheidet man ein- und mehrzifferige Zahlen. Die Ziffern sind bekanntlich

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 0.

Die letzte Ziffer 0, Null, dient dazu, um anzuzeigen, daß in einer mehrzifferigen Zahl eine Stelle unbesetzt geblieben ist.

Um das Gesetz, nach welchem die mehrzifferigen Zahlen im decadischen Zahlen-Systeme gebildet werden, kürzer darstellen zu können, bezeichnen wir noch die auf 9 folgende Zahl, Zehn, welche die Grundzahl des decadischen Zahlensystems genannt wird, vorläufig durch den Buchstaben z, ferner das Product $z \, . \, z$ durch z^2, $z \, . \, z \, . \, z$ durch z^3 u. s. w. und bemerken zugleich, daß man dergleichen abgekürzt geschriebene Producte aus gleichen Factoren Potenzen und die denselben oben beigesetzten Zahlen, welche die Anzahl der gleichen Factoren angeben, Exponenten nennt. Hierdurch sind wir in den Stand gesetzt, die Bedeutung einer jeden mehrzifferigen decadischen Zahl kurz und bequem auszudrücken; so ist z. B.

$$57392 = 5 \, . \, z^4 + 7 \, . \, z^3 + 3 \, . \, z^2 + 9 \, . \, z + 2.$$

Ueberhaupt ist jede mehrzifferige Zahl einer Summe aus so viel Summanden gleich, als die Zahl Ziffern hat. Die einzelnen Summanden sind Producte, welche zu dem einen Factor eine der Ziffern, zum andern Factor aber eine Potenz von Zehn haben, deren Exponent der Anzahl der auf der rechten Seite noch folgenden Ziffern gleich ist, mit Ausnahme der letzten Ziffer, welche unmittelbar selbst einen der Summanden bildet.

Eben so ist $$8064 = 8 \, . \, z^3 + 6 \, . \, z + 4,$$
wofür man auch wohl noch zweckmäßiger

$$8 \, . \, z^3 + 0 \, . \, z^2 + 6 \, . \, z + 4$$

schreiben kann, indem durch das Glied $0 \, . \, z^2$ angezeigt wird, daß zwischen $8z^3$ und $6z$ ein Glied fehlt. Da das Verfahren, nach welchem man decadische Zahlen addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt, als bekannt vorausgesetzt werden kann, da ferner die Gründe, auf denen dieses Verfahren beruht, sich äußerst leicht aus den vorhergehenden Sätzen ergeben, überdies schon an verschiedenen Stellen im Vorhergehenden hierauf hingewiesen worden ist, so glauben wir, daß jeder Leser selbst im Stande sein wird, den Beweis für die Richtigkeit des beim gewöhnlichen Zifferrechnen anzuwendenden Verfahrens mit Leichtigkeit zu führen, weßhalb wir hierauf nicht näher eingehen.

Wir bemerken nur noch, daß sich nach Analogie des decadischen Zahlensystems, dessen Grundzahl gleich Zehn ist, unzählige andere Zahlensysteme bilden lassen, indem man auch jede beliebige andere Zahl als Grundzahl annehmen kann. Jedes dieser Zahlensysteme erfordert so viele Ziffern, als die Grundzahl Einheiten hat. Das monadische Zahlensystem, dessen sich die ganz Ungebildeten bedienen, hat nur die eine Ziffer 1; jede Zahl wird hier mit so viel Ziffern (Strichen) geschrieben, als dieselbe Einheiten hat. Im dyadischen Zahlensysteme reicht man mit den Ziffern 0 und 1, im triadischen mit den Ziffern 0, 1, 2 aus u. s. w. In einem Zahlensysteme, dessen Grundzahl größer, als Zehn ist, müßte man jedoch zu den gebräuchlichen Ziffern noch neue Zeichen hinzufügen; so würde man z. B. im dodecadischen noch zwei besonderer Zeichen für Zehn

und Elf bedürfen. Nehmen wir als solche x und y an, so kann man folgende Zusammenstellungen von Zahlen nach verschiedenen Zahlensystemen ausgedrückt bilden:

Decadisch.	Dyadisch.	Pentadisch.	Dodecadisch.
1	1	1	1
2	10	2	2
5	101	10	5
10	1010	20	x
12	1100	22	10
49	110001	144	41
83	1010011	313	6y
131	10000011	1011	xy
729	1011011001	10404	509
1308	10100011100	20213	910

Zweiter Abschnitt.

Von den vier Species in allgemeinen Ausdrücken.

A. Von der Allgemeingültigkeit der früheren Sätze.

§. 64. Erklärung.

Sind a und b beliebige (absolute ganze) Zahlen, so ist zwar die Summe $a + b$ und das Product $a \cdot b$ jedesmal wieder einer (absoluten ganzen) Zahl gleich, welche Zahlen man auch immer unter den Buchstaben a und b verstehen mag; dagegen dürfen in der Differenz $a - b$ und dem Quotienten $a : b$ die Werthe von a und b nicht ganz willkürlich angenommen werden, wenn diese Ausdrücke wirklich Zahlen vorstellen sollen; so gibt es z. B. keine (absolute ganze) Zahl, welche sich für Ausdrücke wie $4 - 6$, $8 : 5$ setzen ließe. Da derartige Ausdrücke keine Zahl bezeichnen, so gehören sie streng genommen nicht in die Arithmetik, welche nichts anderes, als die Zahl zu ihrem Gegenstande hat. Wollte man jedoch jene Ausdrücke von den arithmetischen Entwickelungen gänzlich ausschließen, so würde ein Operiren in allgemeinen Zeichen in den meisten Fällen unmöglich oder doch mit schwierigen und weitläufigen Untersuchungen verbunden sein, da man vor der Anwendung einer jeden Regel vorher untersuchen müßte, ob die hierdurch hervorgehenden Ausdrücke auch wirklich wieder Zahlen bedeuten. Man ist daher, um ein allgemeines Operiren möglich zu machen, übereingekommen, in die arithmetischen Entwickelungen auch solche Ausdrücke aufzunehmen, welche nur die Form wirklicher Zahlzeichen haben, ohne selbst eine Zahl zu bedeuten, und man behandelt dieselben nach den für wirkliche Zahlen erwiesenen Gesetzen.

Im Folgenden sollen nun die Buchstaben a, b, c . . . nicht mehr wie bisher, (absolute ganze) Zahlen, sondern überhaupt beliebige allgemeine Ausdrücke, d. h. überhaupt Ausdrücke bedeuten, welche aus wirklichen Zahlen durch allgemeine Anwendung der Gesetze der vier Species auf irgend eine Art hervorgegangen sind, es mögen nun dieselben wirklich wieder Zahlen bedeuten oder nicht. — Jene Ausdrücke werden im allgemeinen dann gleich gesetzt, wenn sich der eine in den andern nach den Gesetzen der vier Species verwandeln läßt.

Obschon ein Ausdruck wie 5 — 8 an sich keine Zahl bedeutet, so kann derselbe doch bei Anwendung der über Differenzen erwiesenen Gesetze in Verbindung mit andern Ausdrücken sehr wohl dazu dienen, eine Zahl zu bezeichnen. So ist z. B.

$$(5 - 8) + 9 \text{ (nach §. 16)} = (5 + 9) - 8 = 6.$$

Als ein zweites Beispiel, den Nutzen solcher Ausdrücke, welche an sich keine Zahl bedeuten, zu zeigen, mag Folgendes dienen:

Wenn man auf die Differenz

$$1)\quad 9 - (12 - 7)$$

die Regel des §. 22 anwendet, so verwandelt sich dieselbe in die Summe

$$2)\quad (9 - 12) + 7,$$

in welcher der eine Summand 9 — 12 für sich allein keine Zahl bedeutet. Wendet man aber jetzt noch §. 16 an, so erhält man

$$3)\quad (9 + 7) - 12,$$

einen Ausdruck, in welchem, so wie in (1) alle vorkommenden Zeichen wirklich Zahlen vorstellen. Hier ist also der Ausdruck (1) in den Ausdruck (3) mit Benutzung des Zeichens 9 — 12, welches an sich keine Zahl bedeutet, nach früheren Regeln verwandelt worden, und wirklich ist

$$9 - (12 - 7) = (9 + 7) - 12 = 4.$$

Da indeß die Gesetze über die vier Species im vorhergehenden Abschnitte nur unter der bestimmten Voraussetzung erwiesen sind, daß alle Ausdrücke wirklich Zahlen bedeuten, so wird man mit Recht fragen, ob es denn so ohne weiteres erlaubt ist, dieselben auch auf solche Ausdrücke, welche keine Zahlen bedeuten, anzuwenden. In der That werden wir später sehen, daß diese allgemeine Anwendung eine Einschränkung (bei der Division mit Null) erleidet, deren Vernachlässigung zu falschen oder sich widersprechenden Resultaten führen würde. Wir übergehen jedoch für jetzt diese Untersuchung, indem wir es für zweckmäßiger halten, den Leser zuerst mit den Resultaten jener allgemeinen Anwendung bekannt zu machen, und uns die wissenschaftliche Begründung für eine spätere Gelegenheit vorbehalten.

B. Von den mehrgliederigen Ausdrücken.

§. 65. Erklärung.

Eine Summe aus zwei Summanden nennt man auch einen zweigliederigen Ausdruck (Binomium) und eine Summe aus mehreren Summanden überhaupt einen mehrgliederigen Ausdruck (Polynomium). Die einzelnen Summanden werden auch die Glieder genannt. Jeder Ausdruck, welcher keine Summe ist (oder doch nicht als Summe angesehen werden soll), heißt ein eingliederiger Ausdruck (Monomium).

§. 66. Erklärung.

Jeder eingliederige Ausdruck ist entweder ein Product oder kann doch als ein Product angesehen werden, indem man statt a auch 1 . a schreibt, welchen Ausdruck man ebenfalls ein Product nennt.

*§. 66. Zusatz.

Die Gleichungen der Multiplication

$$a \,.\, b = b \,.\, a$$
$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$$
$$a \,.\, (b - c) = a \,.\, b - a \,.\, c$$
$$a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$$

bleiben, wie leicht zu sehen, auch dann noch richtig, wenn man in denselben einen Factor (oder mehrere) gleich 1 setzt.

§. 67. Zusatz.

Aus der Gleichung $a = 1 . a$

folgt auch noch $\frac{a}{1} = a.$

Es ergibt sich hieraus die praktische Regel: **Eins multiplicirt und dividirt nicht.** (Dagegen addirt und subtrahirt Eins.)

§. 68. Erklärung.

In den eingliederigen Ausdrücken pflegt man die bestimmten Factoren allemal voranzustellen und die unbestimmten nach der Ordnung des Alphabets folgen zu lassen; man ordnet z. B.

$3ab$, $5dhx$ u. dgl.

Zwei eingliederige Ausdrücke, wie $4a$ und $7a$ oder $2cd$ und $8cd$, welche in den unbestimmten Factoren übereinstimmen, heißen **gleichnamig**.

§. 69. Zusatz.

Bei der **Addition** und **Subtraction gleichnamiger Ausdrücke** kann man die Regel anwenden: Producte, welche einen gleichen Factor haben, werden addirt oder subtrahirt, wenn man die andern Factoren addirt oder subtrahirt; so ist z. B.

$$5a + 7a = 12a$$
$$3c + 8c + 4c = 15c$$
$$9b - 6b = 3b \text{ u. dgl. m.}$$

Wenn man sich in der Gleichung

$$5a + 7a = 12a$$

$a = 1000$ denkt, so verwandelt sich dieselbe in die folgende

$$5000 + 7000 = 12000.$$

Wenn man in dem mehrgliederigen Ausdrucke

$$3a + 7b + 4c$$

$a = 100$, $b = 10$ und $c = 1$ annimmt, so verwandelt sich derselbe in die mehrzifferige Zahl $374.$

Die mehrzifferige Zahl ist daher als ein specieller Fall des mehrgliederigen Ausdrucks anzusehen, weßhalb auch das Rechnen mit mehrgliederigen Ausdrücken in ganz ähnlicher Art wie das Rechnen mit mehrzifferigen Zahlen geschieht.

§. 70. Zusatz.

Wenn mehrgliederige Ausdrücke addirt oder subtrahirt werden sollen, so verfährt man am bequemsten so, daß man die gleichnamigen Glieder unter einander setzt und dann die eben angeführte Regel anwendet.

Uebungsbeispiele.

A. Addition.

1)
$$\begin{array}{r} 8a + 2b + 4c \\ 5a + 6b + 2c \\ \hline 13a + 8b + 6c \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 5b + 8d + 9f + 3 \\ 4b + 2d + 4f + 2 \\ \hline 9b + 10d + 13f + 5 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 6a + 2b + 3c \\ 8a + 5b + 4c \\ 4a + 6b + 2c \\ \hline 18a + 13b + 9c \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} 4d + 2e + 9f + 7g \\ 2d + 8e + 12f + 20g \\ 9d + 4e + 15f + 14g \\ \hline 15d + 14e + 36f + 41g \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{l} 4a + 6b + 2c + 3d + 4e \\ 5a + 4b + + 9d + 2e \\ 7a + 5b + 8c + 3d + 3e + 5f \\ 4b + 5c + 2d + 5e \\ \hline 16a + 19b + 15c + 17d + 14e + 5f \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{l} 3b + 8c + 9e + 4f \\ 2a + 5b + 7c + 3d + 4e + 2f \\ 3a + 9d + 2f \\ 18a + 20b + 3c + 7f \\ 4a + 7b + 8c + 3d + 5e + f + 2g \\ \hline 27a + 35b + 26c + 15d + 18e + 16f + 2g \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{l} 5 + 2a + b + c + 3d \\ 7 + b + 4c + e \\ 2 + 3a + 9c + 8d + 2e \\ 7a + b + 2c + 4d + 3e + f \\ \hline 14 + 12a + 3b + 16c + 15d + 6e + f \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{l} 5ab + 3cd + 4e \\ 2ab + 3e \\ 7ab + cd + 5e \\ 4cd + e \\ \hline 14ab + 8cd + 13e \end{array}$$

B. Subtraction.

1)
$$\begin{array}{l} 8a + 7b + 4c \\ 2a + 5b + 3c \\ \hline 6a + 2b + c \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l} 25a + 13b + 8c + 9 \\ 14a + 2b + 4c + 8 \\ \hline 11a + 11b + 4c + 1 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l} 5a + 7b + 3c + 9d \\ 4a + c + 7d \\ \hline a + 7b + 2c + 2d \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{l} 3a + 9b + 2c + 7d + 14e \\ 2a + 2c + 5e \\ \hline a + 9b + 7d + 9e. \end{array}$$

§. 71. Erklärung.

Wenn man zwei eingliederige Ausdrücke mit einander multipliciren soll, so kommt die Regel zur Anwendung: die Ordnung der Factoren ist gleichgiltig. Man pflegt aber in Uebereinstimmung mit dem oben (§. 68) Gesagten zuerst die bestimmten Factoren in einander zu multipliciren und die unbestimmten nach der Ordnung des Alphabets folgen zu lassen.

Uebungsbeispiele.

1) $3a \times 2b = 6ab$ *)
2) $5ab \times 7c = 35abc$
3) $4ac \times 8b = 32abc$
4) $12d \times 3ag = 36adg$

*) Denkt man sich $a = 100$ und $b = 1000$, so fällt dieses Exempel mit folgendem $300 . 2000 = 600000$ zusammen.

$$\begin{array}{llcll}
5) & 6bd & \times & cg & = 6bcdg \\
6) & 9ad & \times & 3bg & = 27abdg \\
7) & 4ac & \times & 3ad & = 12aacd \\
8) & 2bbd & \times & 5abcd & = 10abbbcdd.
\end{array}$$

§. 72. Zusatz.

Die Regel des §. 31 (wie eine Summe mit einer Zahl multiplicirt wird) läßt sich vermöge §. 65 auch so ausdrücken: Ein mehrgliederiger Ausdruck wird mit einem eingliederigen Ausdrucke multiplicirt, wenn man jedes Glied des mehrgliederigen Ausdrucks mit dem eingliederigen Ausdrucke multiplicirt, so ist z. B.

$$\begin{array}{lll}
1) & (5a + 3b + 2) \,.\, 3 & = 15a + 9b + 6\text{*)} \\
2) & (9a + 7b + 12c) \,.\, 4a & = 36aa + 28ab + 48ac \\
3) & (3d + 5f + 20h) \,.\, 2h & = 6dh + 10fh + 40hh \\
4) & (2a + 3b + 5c + 7) \,.\, 4b & = 8ab + 12bb + 20bc + 28b \\
5) & (8ab + 3ac + 9bd) \,.\, 12c & = 96abc + 36acc + 108bcd \\
6) & (3ad + 7bc + 4cd) \,.\, 3bd & = 9abdd + 21bbcd + 12bcdd.
\end{array}$$

§. 73. Zusatz.

Vermöge §. 65 können wir die Regel des §. 38, (wie zwei Summen multiplicirt werden), auch so aussprechen: Zwei mehrgliederige Ausdrücke werden mit einander multiplicirt, wenn man jedes Glied des einen mit jedem Gliede des andern multiplicirt. So ist z. B.

$$\begin{array}{lll}
1) & (a + b) \,.\, (c + d) & = ac + ad + bc + bd \\
2) & (5a + 3b) \,.\, (4c + 6d) & = 20ac + 30ad + 12bc + 18bd \\
3) & (a + 4b) \,.\, (3c + 5d + f) & = 3ac + 5ad + af + 12bc + 20bd + 4bf.
\end{array}$$

§. 74. Zusatz.

Wenn durch die Multiplication der einzelnen Glieder gleichnamige Producte entstehen, so lassen sich dieselben in ein Glied zusammenziehen. Man ordnet für diesen Zweck die Rechnung am bequemsten so an, wie dies die folgenden Beispiele zeigen**):

$$\begin{array}{lrrrrrr}
1) & 3a & +\;5b & & & & \\
 & 7a & +\;3b & & & & \\
\hline
 & 21aa & +\;35ab & & & & \\
 & & +\;9ab & +\;15bb & & & \\
\hline
 & 21aa & +\;44ab & +\;15bb & & & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrr}
2) & 5a & +\;3b & +\;8c & & \\
 & 4a & +\;6b & & & \\
\hline
 & 20aa & +\;12ab & +\;32ac & & \\
 & & +\;30ab & & +\;18bb & +\;48bc \\
\hline
 & 20aa & +\;42ab & +\;32ac & +\;18bb & +\;48bc \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrrr}
3) & 8a & +\;4b & +\;c & & & \\
 & 3a & +\;9b & +\;2c & & & \\
\hline
 & 24aa & +\;12ab & +\;3ac & & & \\
 & & +\;72ab & & +\;36bb & +\;9bc & \\
 & & & +\;16ac & & +\;8bc & +\;2cc \\
\hline
 & 24aa & +\;84ab & +\;19ac & +\;36bb & +\;17bc & +\;2cc \\
\end{array}$$

---

*) Denkt man sich $a = 100$, $b = 10$, so fällt die obige Aufgabe mit dem folgenden Exempel der gemeinen Rechenkunst zusammen:

$$532 \,.\, 3 = 1596.$$

**) Das Verfahren hat, wie leicht zu sehen, die größte Aehnlichkeit mit demjenigen, welches man bei der Multiplication zweier mehrzifferigen Zahlen anwendet.

Uebungsbeispiele.

1) $(7a+2b) . (5a+8b) = 35aa+66ab+16bb$
2) $(5d+3e+7f) . (2d+3f) = 10dd+6de+29df+9ef+21ff$
3) $(7+2a+3aa) . (5+4a) = 35+38a+23aa+12aaa$
4) $(3a+12b+8c) . (2a+9b+10c) = 6aa+51ab+46ac+108bb+ 192bc+80cc$
5) $(9d+5f+2g+4h) . (8d+f+2g) = 72dd+49df+34dg+32dh+ 5ff+12fg+4fh+4gg+8gh$
6) $(2aa+6ab+5bb) . (3a+2b) = 6aaa+22aab+27abb+10bbb$
7) $(5bc+3cd+8de) . (7bc+4cd) = 35bbcc+41bccd+56bcde+ 12ccdd+32cdde$
8) $(2+3a+5bc) . (4+2a+bc) = 8+16a+22bc+6aa+13abc+ 5bbcc.$

§. 75. Zusatz.

Wenn in einem Producte derselbe Factor mehrmals wiederkehrt, so bedient man sich einer abgekürzten Schreibweise; man schreibt nämlich

statt aa kürzer a^2 (lies: a Quadrat)
" aaa " a^3 (lies: a hoch 3)
" aaaa " a^4 (lies: a hoch 4)
" aaaaa " a^5 (lies: a hoch 5) u. s. w.

Nach dieser abgekürzten Schreibweise ist z. B.

$$10^2 = 10 . 10 = 100$$
$$10^3 = 10 . 10 . 10 = 1000$$
$$10^4 = 10 . 10 . 10 . 10 = 10000 \text{ u. s. w.}$$
$$2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$$
$$2^5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 32$$
$$2^8 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 256$$
$$3^2 = 3 . 3 = 9$$
$$3^4 = 3 . 3 . 3 . 3 = 81$$
$$5^3 = 5 . 5 . 5 = 125$$

u. dgl. m. Ferner ist auch leicht einzusehen, wie mit diesen abgekürzten Ausdrücken weiter gerechnet wird; so ist z. B.

$$a^2 . a = aa . a = a^3$$
$$a^2 . a^3 = aa . aaa = a^5$$
$$a^3 . a^3 = aaa . aaa = a^6.$$

Aus gleichen Gründen ist

$$a^5 . a^7 = a^{12}$$
$$a^6 . a^3 = a^9$$
$$a^{15} . a^8 = a^{23} \text{ u. dgl. m.}$$

Uebungsbeispiele.

1) $5a^3 + 7a^3 = 12a^3$*)
2) $3a^2 + 8a^2 + 4a^2 = 15a^2$
3) $8a^2 - 5a^2 = 3a^2$
4) $12a^4 - 9a^4 = 3a^4$
5) $5a^3 . 2a^2 = 10a^5$
6) $12a^4 . 3a = 36a^5$

---

*) Nicht $= 12a^6$, wie vielleicht mancher Anfänger zu rechnen geneigt ist, sondern $12a^3$ nach der Regel: Zwei Producte $5a^3$ und $7a^3$, welche einen gleichen Factor a^3 haben, werden addirt, wenn man die anderen Factoren 5 und 7 addirt und den gleichen Factor a^3 unverändert stehn läßt.

7) $8a^2b \,.\, 7ab = 56a^3b^2$
8) $2a^4bc^2 \,.\, 5a^3c^4 = 10a^7bc^6$
9) $(3a + 7a^2 + 4a^3) \,.\, 4a^2 = 12a^3 + 28a^4 + 16a^5$
10) $(5a^2b^2 + 7ab^3 + 2b^4) \,.\, 6ab^2 = 30a^3b^4 + 42a^2b^5 + 12ab^6$
11) $(2a^6 + 3a^4b + 9a^2b^2 + 5b^3) \,.\, 4a^4b^3 = 8a^{10}b^3 + 12a^8b^4 + 36a^6b^5 + 20a^4b^6$
12) $(9 + 5a) \,.\, (7 + 3a) = 63 + 62a + 15a^2$
13) $(3a + 6a^2) \,.\, (4 + 7a) = 12a + 45a^2 + 42a^3$
14) $(8 + a + 5a^2) \,.\, (6 + 5a) = 48 + 46a + 35a^2 + 25a^3$
15) $(2a^2 + 7a^3 + 5a^4) \,.\, (9a + 2a^2) = 18a^3 + 67a^4 + 59a^5 + 10a^6$
16) $(6 + 5a + 4a^2 + 3a^3) \,.\, (3 + 8a^2) = 18 + 15a + 60a^2 + 49a^3 + 32a^4 + 24a^5$
17) $(5 + 2a + 8a^2) \,.\, (6 + 8a + 3a^2) = 30 + 52a + 79a^2 + 70a^3 + 24a^4$
18) $(4 + 5a + 3a^2) \,.\, (7 + 8a + 5a^2) = 28 + 67a + 81a^2 + 49a^3 + 15a^4$
19) $(2a + 9a^2 + 3a^3) \,.\, (8 + 4a + 5a^3) = 16a + 80a^2 + 60a^3 + 22a^4 + 45a^5 + 15a^6$
20) $(15a + 12a^2 + 4a^4) \,.\, (2a + 5a^2 + 8a^3) = 30a^2 + 99a^3 + 180a^4 + 104a^5 + 20a^6 + 32a^7$
21) $(7 + 8a + 3a^2 + 5a^3) \,.\, (4 + 2a + 9a^2) = 28 + 46a + 91a^2 + 98a^3 + 37a^4 + 45a^5$
22) $(2 + 5a + 8a^2 + 11a^3) \,.\, (6a + 3a^2 + a^4) = 12a + 36a^2 + 63a^3 + 92a^4 + 38a^5 + 8a^6 + 11a^7$
23) $(8a^2 + 5ab + 4b^2) \,.\, (5a + 2b) = 40a^3 + 41a^2b + 30ab^2 + 8b^3$
24) $(2x^2 + 3ax + a^2) \,.\, (x^2 + 7ax + 9a^2) = 2x^4 + 17ax^3 + 40a^2x^2 + 34a^3x + 9a^4$.

§. 76, a. Zusatz.

Durch das Vorhergehende wird man auch leicht in den Stand gesetzt, zwei eingliederige Ausdrücke durch einander zu dividiren, da ja die Division das Umgekehrte der Multiplication ist. Wir beschränken uns daher auf die Aufführung folgender Beispiele:

1) $6ab : 3a = 2b$
2) $a^6 : a^2 = a^4$
3) $a^{10} : a^7 = a^3$
4) $14a^2b : 7ab = 2a$
5) $24a^3b^4c : 6ab^2 = 4a^2b^2c$.

§. 76, b. Zusatz.

Ein Quotient, dessen Dividendus gleich dem Divisor ist, ist = 1. So ist z. B. $\frac{4}{4} = 1$,

weil 4 . 1 = 4 ist, und $\frac{a}{a} = 1$,

weil a . 1 = a ist.

§. 77. Zusatz.

Soll ein mehrgliederiger Ausdruck durch einen eingliederigen dividirt werden, so dividirt man (vermöge der Regel des §. 44) jedes Glied des mehrgliederigen Ausdrucks durch den eingliederigen Ausdruck; so ist z. B.

1) $(4a + 6a^2b + 12a^3b^2) : 2a = 2 + 3ab + 6a^2b^2$
2) $(9x^3 + 15x^5) : 3x^2 = 3x + 5x^3$
3) $(24a^3b^2 + 36a^2b^3 + 48ab^4) : 4ab^2 = 6a^2 + 9ab + 12b^2$
4) $(5a^2 + 125a^6) : 5a^2 = 1 + 25a^4$.

Die Division zweier mehrgliederigen Ausdrücke durch einander findet weniger Anwendung und ist mit größeren Schwierigkeiten verbunden, da wir keine Regel gehabt

haben, wie eine Zahl durch eine Summe dividirt wird. Wir werden diesen Gegenstand später bei den algebraischen Summen erledigen.

Bemerkung.

Wir haben im Vorhergehenden nur solche Aufgaben der Division behandelt, bei welchen der Divisor im Dividendus aufgeht. Der folgende Abschnitt handelt von den Quotienten oder Brüchen überhaupt, sowohl wenn der Divisor im Dividendus aufgeht, als auch wenn dieses nicht der Fall ist.

C. Von den Brüchen.

§. 78. Erklärung.

Obschon in den §§. 40 bis 63 die Regeln der Bruchberechnung vollständig enthalten sind, so wollen wir doch noch die in praktischer Hinsicht wichtigsten Regeln zur bequemen Uebersicht hier zusammenstellen:

1) Ein Bruch bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner durch die nämliche Zahl multiplicirt oder dividirt, so ist z. B.

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}; \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

oder in allgemeinen Zeichen: $\frac{a}{b} = \frac{a \,.\, m}{b \,.\, m}$.

2) Man kann diese Regel zunächst benutzen, um Brüche, welche verschiedene Nenner haben, unter gleiche Benennung zu bringen. Man sucht hierzu einen Generalnenner, in welchem alle gegebenen Nenner aufgehen. Eine solche Zahl läßt sich allemal erhalten, wenn man sämmtliche gegebene Nenner mit einander multiplicirt*). Man bringt nun einen Bruch auf den Generalnenner, indem man den Nenner des gegebenen Bruches in den Generalnenner dividirt und mit dem entstandenen Quotienten den Zähler (und Nenner) des gegebenen Bruches multiplicirt. Sollen z. B. die Brüche $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{12}$ auf gleichen Nenner gebracht werden, so ist, wie leicht zu sehen, der kleinste Generalnenner 72 und das praktische Verfahren der Ausrechnung folgendes:

	72	
$\frac{3}{8}$	9	27
$\frac{2}{9}$	8	16
$\frac{5}{12}$	6	30

Hiernach ist also

$$\frac{3}{8} = \frac{27}{72}, \frac{2}{9} = \frac{16}{72}, \frac{5}{12} = \frac{30}{72}.$$

3) Brüche mit gleichem Nenner werden addirt oder subtrahirt, wenn man ihre Zähler addirt oder subtrahirt; so ist z. B.

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}, \qquad \frac{6}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

*) Wie man den kleinsten und eben deshalb für die meisten Rechnungen bequemsten Generalnenner findet, wird weiter unten (§. 290) methodisch gelehrt werden. In den meisten Fällen ist derselbe jedoch so leicht zu ermitteln, daß es keiner besonderen Anleitung hierzu bedarf.

oder in allgemeinen Zeichen:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

4) Wenn man Brüche mit ungleichen Nennern addiren oder subtrahiren soll, so hat man dieselben vorher (nach Nro. 2) auf gleichen Nenner zu bringen.

5) Ein Bruch wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man den Zähler multiplicirt; so ist z. B.

$$\frac{3}{7} . 5 = \frac{15}{7}$$

oder in allgemeinen Zeichen:

$$\frac{a}{b} . c = \frac{a . c}{b}.$$

6) Ein Bruch wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den Nenner mit der Zahl multiplicirt; so ist z. B.

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}$$

oder in allgemeinen Zeichen:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b . c}$$

7) Zwei Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt; so ist z. B.

$$\frac{3}{4} . \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

oder in allgemeinen Zeichen:

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a . c}{b . d}.$$

8) Brüche mit gleichem Nenner werden durch einander dividirt, wenn man ihre Zähler durch einander dividirt; so ist z. B.

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{8} = 5 : 7 = \frac{5}{7}$$

oder in allgemeinen Zeichen:

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = a : b = \frac{a}{b}.$$

§. 79. Erklärung.

Zwei Zahlen, deren Product = 1 ist, heißen reciproke Zahlen, und die eine wird die Reciproke der andern genannt.

So ist z. B. die Reciproke von a gleich $\frac{1}{a}$, da a . $\frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$ ist, ferner die Reciproke von $\frac{a}{b}$ gleich $\frac{b}{a}$, da $\frac{a}{b} . \frac{b}{a} = \frac{a . b}{b . a} = \frac{a . b}{a . b} = 1$ ist,

Da man statt a auch $\frac{a}{1}$ setzen kann, so ist von den beiden so eben aufgeführten Beispielen das erste nur ein specieller Fall des zweiten, welches in jenes übergeht, wenn man b = 1 setzt.

§. 80. Zusatz.

Ein Ausdruck (c) wird durch einen Bruch $\left(\frac{a}{b}\right)$ dividirt, wenn man denselben mit der Reciproke $\left(\frac{b}{a}\right)$ multiplicirt, in Zeichen:

$$c : \frac{a}{b} = c \cdot \frac{b}{a}.$$

Beweis: Die Gleichung ist richtig, da $c \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = c \cdot 1 = c$ ist.

Man kann die obige für das Rechnen mit Brüchen sehr bequeme Regel auch kurz dahin aussprechen: Dividiren heißt mit der Reciproke multipliciren.

Das so eben erhaltene Resultat läßt sich auch auf folgende Weise ableiten: — Nach Nr. 8 des §. 78 werden Brüche mit gleichem Nenner durch einander dividirt, wenn man ihre Zähler durch einander dividirt. Wenn wir daher in der Aufgabe

$$c : \frac{a}{b}$$

den Dividendus c auf den Nenner b bringen, indem wir

$$c = \frac{c \cdot b}{b}$$

setzen, so erhalten wir

$$c : \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b}{b} : \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b}{a} = c \cdot \frac{b}{a}.$$

§. 81. Zusatz.

Wenn Zähler und Nenner eines Bruches einen oder mehrere gemeinschaftliche Factoren haben, so kann man die gemeinschaftlichen Factoren im Zähler und Nenner vermöge der Regel 1 des §. 61 weglassen. Man nennt dies Aufheben.

So kann man z. B. in dem Bruche $\frac{3a}{5a}$ im Zähler und Nenner a aufheben; hiernach ist also

$$\frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}.$$

Ferner kann man z. B. in dem Bruche $\frac{24ab}{16bc}$ Zähler und Nenner durch 8 und b aufheben; dann erhält man

$$\frac{24ab}{16bc} = \frac{3a}{2c}.$$

Der Bruch $\frac{6a^3b^2}{21ab^4}$ läßt sich durch 3, a und b^2 aufheben. Hierdurch ergibt sich

$$\frac{6a^3b^2}{21ab^4} = \frac{2a^2}{7b^2} \text{ u. dgl. m.}$$

In ähnlicher Art sind die folgenden Beispiele zu behandeln.

1) $\frac{16a}{20b} = \frac{4a}{5b}$ 2) $\frac{5ax}{7az} = \frac{5x}{7z}$

3) $\frac{12abc}{18bcd} = \frac{2a}{3d}$ 4) $\frac{9a^2mx}{15am^3z} = \frac{3ax}{5m^2z}$

5) $\frac{125a^2x^3}{25a^2x^5} = \frac{5}{x^2}$ 6) $\frac{4b}{12ab} = \frac{1}{3a}$

7) $\frac{7m^2n}{28m^4n^2} = \frac{1}{4m^2n}$ 8) $\frac{32a^2cg^3}{24a^2bg^5} = \frac{4c}{3bg^2}$.

Die praktische Anwendung der in §. 78 und 79 enthaltenen Regeln über das Multipliciren und Dividiren der Brüche wollen wir noch durch folgende Beispiele erläutern, in denen die beigesetzte Ziffer die anzuwendende Regel anzeigt:

9) $\frac{3a}{4b} \cdot 8c$ (Regel 5) $= \frac{24ac}{4b}$ (aufgehoben) $= \frac{6ac}{b}$

10) $\frac{5b}{3c} : 4b$ (Regel 6) $= \frac{5b}{12bc}$ (aufgehoben) $= \frac{5}{12c}$

11) $\frac{3a}{2b^2} \cdot \frac{5b}{6c}$ (Regel 7) $= \frac{15ab}{12b^2c}$ (aufgehoben) $= \frac{5a}{4bc}$

12) $\frac{6ab}{5c^2} : \frac{8a^3}{5c^2}$ (Regel 8) $= \frac{6ab}{8a^3}$ (aufgehoben) $= \frac{3b}{4a^2}$

13) $3a : \frac{2b}{3c}$ (Regel 9) $= 3a \cdot \frac{3c}{2b}$ (Regel 5) $= \frac{9ac}{2b}$

14) $\frac{4c^2}{3d} : \frac{8c}{9b}$ (Regel 9) $= \frac{4c^2}{3d} \cdot \frac{9b}{8c}$ (Regel 7) $= \frac{36bc^2}{24cd} = \frac{3bc}{2d}$.

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

15) $4b \cdot \frac{2c}{3d} = \frac{8bc}{3d}$

16) $\frac{2c^2}{5fg} \cdot 15dg = \frac{6c^2d}{f}$

17) $\frac{4m}{3n} : 8p = \frac{m}{6np}$

18) $\frac{8a^3}{3b} : 4a^2 = \frac{2a}{3b}$

19) $\frac{5a}{3b} \cdot \frac{2a}{7c} = \frac{10a^2}{21bc}$

20) $\frac{4d^2}{5c} \cdot \frac{5c}{2d} = 2d$

21) $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$

22) $\frac{24ab}{5z^2} : \frac{8b^2}{5z^2} = \frac{3a}{b}$

23) $a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$

24) $3x : \frac{5x}{a} = \frac{3a}{5}$

25) $\frac{4b}{9c} : \frac{2a}{5c} = \frac{10b}{9a}$

26) $\frac{3d}{5f^2} : \frac{6d}{5f} = \frac{1}{2f}$

27) $\frac{27x^2}{8z^2} : 9x^3 = \frac{3}{8xz^2}$

28) $\frac{3}{ab} \cdot \frac{4a}{9} = \frac{4}{3b}$

29) $\frac{8a^2}{15g^3} : \frac{2a}{3g} = \frac{4a}{5g^2}$

30) $12a^4 \cdot \frac{3b}{4a^2} = 9a^2b$

31) $\frac{4x^2}{5z^3} \cdot \frac{3x^3}{8z^5} = \frac{3x^5}{10z^8}$

32) $\frac{4x^2}{5z^3} : \frac{3x^3}{8z^5} = \frac{32z^2}{15x}$

33) $\frac{a}{2b} : 3a^2 = \frac{1}{6ab}$

34) $3a^2 : \frac{a}{2b} = 6ab$

35) $\frac{ac^3}{b^2} \cdot bc^2 = \frac{ac^5}{b}$

36) $\frac{9cgh}{8df} : 3ach = \frac{3g}{8adf}$

37) $\frac{12ab}{x^2z} : \frac{ax}{2bz^2} = \frac{24b^2z}{x^3}$

38) $3a : \frac{1}{2b} = 6ab$

39) $\frac{am}{3b^2} : 5a^2m = \frac{1}{15ab^2}$

40) $\frac{b+c}{5d} \cdot 3a = \frac{3a \cdot (b+c)}{5d}$

41) $\frac{6c}{(a+b)^2} : 3(a+b) = \frac{2c}{(a+b)^3}$

42) $\frac{5ax}{3b+2c} : \frac{4az}{2d+g} = \frac{5x(2d+g)}{4z(3b+2c)}$.

§. 82. Zusatz.

Die Regeln der §§. 78 und 79 finden in Verbindung mit den §§. 72 und 77 auch Anwendung, wenn ein mehrgliederiger Ausdruck mit einem eingliederigen Ausdruck multiplicirt oder dividirt werden soll.

Zur Erläuterung des eben Gesagten mögen folgende Beispiele dienen:

Erstes Beispiel: $\left(\frac{3a}{2b} + 5c + \frac{4d}{3f}\right) . 3b.$

Wenden wir hier zunächst §. 72 an, so erhalten wir

$$\frac{9ab}{2b} + 15bc + \frac{12bd}{3f}$$

und dann weiter, wenn wir die Brüche aufheben,

$$\frac{9a}{2} + 15bc + \frac{4bd}{f}.$$

Zweites Beispiel: $\left(4a + \frac{5b}{2c} + \frac{3d}{4g} + h\right) . \frac{6c}{5a}$

$$= \frac{24ac}{5a} + \frac{30bc}{10ac} + \frac{18cd}{20ag} + \frac{6ch}{5a}$$

$$= \frac{24c}{5} + \frac{3b}{a} + \frac{9cd}{10ag} + \frac{6ch}{5a}.$$

Drittes Beispiel: $\left(5a^2 + 6ab + \frac{8a}{3b}\right) : 12ab$

$$= \frac{5a^2}{12ab} + \frac{6ab}{12ab} + \frac{8a}{36ab^2}$$

$$= \frac{5a}{12b} + \frac{1}{2} + \frac{2}{9b^2}.$$

Viertes Beispiel: $\left(\frac{4a}{3b} + 6c\right) : \frac{8c}{5b} = \left(\frac{4a}{3b} + 6c\right) . \frac{5b}{8c}$

$$= \frac{20ab}{24bc} + \frac{30bc}{8c} = \frac{5a}{6c} + \frac{15b}{4}.$$

Uebungsbeispiele.

1) $(4ab + 7cd + 36abd) : 12ad = \frac{b}{3d} + \frac{7c}{12a} + 3b$

2) $\left(\frac{3f}{4g} + \frac{2h}{3k} + 5\right) . 9gh = \frac{27fh}{4} + \frac{6gh^2}{k} + 45gh$

3) $\left(5ax + 3bx + \frac{2}{3} + \frac{7b}{4a}\right) . \frac{2a}{3x} = \frac{10a^2}{3} + 2ab + \frac{4a}{9x} + \frac{7b}{6x}$

4) $\left(8a^2 + \frac{3a}{2b} + \frac{4ac}{5b}\right) : 9ab = \frac{8a}{9b} + \frac{1}{6b^2} + \frac{4c}{45b^2}$

5) $\left(\frac{c}{d} + \frac{2e}{3f} + 4 + \frac{3g}{8h}\right) : 6cg = \frac{1}{6dg} + \frac{e}{9cfg} + \frac{2}{3cg} + \frac{1}{16ch}$

6) $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{5ax}{4bz} + \frac{8x^2}{9z^3}\right) . \frac{3bz}{x^2} = \frac{2az}{x^2} + \frac{15a}{4x} + \frac{8b}{3z^2}$

7) $\left(2d + \frac{3e}{5f}\right) : \frac{3d}{2f} = \frac{4f}{3} + \frac{2e}{5d}$

8) $\left(2 + 3e + \frac{5e^2}{f} + \frac{6e^3}{7fg}\right) : \frac{3e}{4f} = \frac{8f}{3e} + 4f + \frac{20e}{3} + \frac{8e^2}{7g}$

9) $\left(a + \frac{b}{c} + \frac{3d}{4g}\right) \cdot \frac{9cd}{2ab} = \frac{9cd}{2b} + \frac{9d}{2a} + \frac{27cd^2}{8abg}$

10) $\left(\frac{5m^2}{2n} + 3mn + 9n^2p\right) : 12m^2n = \frac{5}{24n^2} + \frac{1}{4m} + \frac{3np}{4m^2}$

11) $\left(3 + \frac{2}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a^3}\right) \cdot 12a^2 = 36a^2 + 24a + 48 + \frac{96}{a}$

12) $\left(3 + \frac{2}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a^3}\right) : 12a^2 = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{6a^3} + \frac{1}{3a^4} + \frac{2}{3a^5}.$

§. 83. Zusatz.

So wie sich ein Quotient, dessen Dividendus ein mehrgliederiger Ausdruck ist, in einen mehrgliederigen Ausdruck, welcher zu Gliedern Quotienten hat, verwandeln läßt, so kann man auch umgekehrt einen mehrgliederigen Ausdruck, welcher zu Gliedern Quotienten hat, in einen Quotienten verwandeln, indem man sämmtliche Brüche nach §. 78, 2 auf gleichen Nenner bringt und dann ihre Zähler addirt.

In dem ersten Beispiele zum vorhergehenden §. haben wir den Quotienten

$$\frac{4ab + 7cd + 36abd}{12ad}$$

in den mehrgliederigen Ausdruck

$$\frac{b}{3d} + \frac{7c}{12a} + 3b$$

verwandelt. Wir wollen uns nun mit der umgekehrten Aufgabe beschäftigen, diesen mehrgliederigen Ausdruck, welcher zu Gliedern Brüche hat, auf die Form eines Bruches zu bringen. Wir suchen zu diesem Zwecke einen Generalnenner, in welchem alle gegebenen Nenner aufgehn, und erkennen leicht als den passenden Generalnenner

$$12ad.$$

Um nun zunächst das erste Glied $\frac{b}{3d}$ auf den Generalnenner zu bringen, dividiren wir nach §. 78, 2 mit dem Nenner $3d$ in den Generalnenner $12ad$, dies gibt $4a$, und mit diesem Quotienten multipliciren wir Zähler und Nenner des gegebenen Bruches $\frac{b}{3d}$; auf diese Art erhalten wir $\frac{b}{3d} = \frac{b \cdot 4a}{3d \cdot 4a} = \frac{4ab}{12ad}.$

Eben so finden wir $\frac{7c}{12a} = \frac{7cd}{12ad}.$

Das letzte Glied $3b$ aber, welches selbst keinen Nenner hat, multipliciren und dividiren wir (vermöge §. 43) mit dem Generalnenner und erhalten so

$$3b = \frac{3b \cdot 12ad}{12ad} = \frac{36abd}{12ad}.$$

Hiernach verwandelt sich der gegebene Ausdruck

$$1) \quad \frac{b}{3d} + \frac{7c}{12a} + 3b$$

in

$$2) \quad \frac{4ab}{12ad} + \frac{7cd}{12ad} + \frac{36abd}{12ad}.$$

Wenden wir nun noch die Regel an: Brüche mit gleichem Nenner werden addirt, wenn man ihre Zähler addirt und den Nenner stehen läßt, so erhalten wir

$$3) \quad \frac{4ab + 7cd + 36abd}{12ad}$$

Uebrigens wird man noch leicht bemerken, daß bei der bloß praktischen Ausrechnung die Zeile (2) ganz weggelassen werden kann.

Uebungsbeispiele.

1) $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + 5 = \frac{6a + 4b + 3c + 60}{12}$

2) $\frac{d}{e} + \frac{f}{g} = \frac{dg + ef}{eg}$

3) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}$

4) $a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$

5) $\frac{3a}{2b} + \frac{5c}{4d} + \frac{7e}{8f} = \frac{12adf + 10bcf + 7bde}{8bdf}$

6) $\frac{3g}{5h} + \frac{7k}{10l} + 2m = \frac{6gl + 7hk + 20hlm}{10hl}$

7) $3d + \frac{5e}{2f} + \frac{3g}{7h} + \frac{k}{14fh} = \frac{42dfh + 35eh + 6fg + k}{14fh}$

8) $\frac{2a}{3b} + 5c + 7d = \frac{2a + 15bc + 21bd}{3b}$

9) $\frac{1}{2} + \frac{3a}{4b} + \frac{5c}{6b^2} + \frac{7d}{8b^3} = \frac{12b^3 + 18ab^2 + 20bc + 21d}{24b^3}$

10) $\frac{x}{3a} + y + \frac{2z}{5a^2} + \frac{4u}{15ab} = \frac{5abx + 15a^2by + 6bz + 4au}{15a^2b}$

Anhang.

Von den Decimalbrüchen.

I.

Ein Decimalbruch ist ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz von Zehn ist und also mit einer Eins und angehängten Nullen geschrieben wird. Man schreibt aber einen Decimalbruch gewöhnlich auf die Art, daß man nur den Zähler hinschreibt und von demselben von der Rechten nach der Linken durch ein Komma so viele Ziffern abschneidet, als der Nenner Nullen hat. Wenn der Zähler eben so viele Ziffern, als der Nenner Nullen hat, so macht man noch eine Null an der linken Seite vor das Komma; und wenn der Zähler weniger Ziffern, als der Nenner Nullen hat, so ersetzt man die fehlenden Ziffern durch Nullen, welche man links vor den Zähler schreibt, macht dann das Komma und noch eine Null vor das Komma, weil man es nicht leiden mag, daß ein Decimalbruch mit dem Komma anfängt. Hiernach ist z. B.

$$\frac{3764}{1000} = 3{,}764$$

$$\frac{48}{100} = 0{,}48$$

$$\frac{29}{10000} = 0{,}0029 \text{ u. dgl. m.}$$

II.

Aus der vorhergehenden Erklärung ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

1) Jeder Decimalbruch ist die Summe aus einer ganzen Zahl (oder Null), welche links vor dem Komma steht, und aus einem ächten Decimalbruche, dessen Zähler an der rechten Seite des Kommas steht.

So ist z. B. $24,587 = \frac{24587}{1000} = 24 + \frac{587}{1000} = 24 + 0,587.$

2) Der ächte Decimalbruch ist, (wenn hinter dem Komma mehr, als eine Ziffer steht), die Summe aus mehreren Brüchen, welche die Ziffern des Zählers nach der Reihe zu Zählern und zu Nennern die auf einander folgenden Potenzen von Zehn, nämlich 10, 100, 1000 u. s. w. haben. So ist z. B.

$$0,578 = \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000}.$$

3) Da hiernach die Einheit einer jeden höheren Stelle das Zehnfache von der Einheit der nächstniederigen Stelle ist, so ist der Decimalbruch genau nach demselben Gesetze wie die decadische Zahl gebildet.

4) In jedem Decimalbruch ist eine Einheit irgend einer Stelle größer, als alle folgenden Stellen zusammengenommen. So gilt z. B. in dem Bruche 25,76893 eine Einheit der zweiten Stelle mehr als alle folgenden zusammen; d. h. es ist $0,01 > 0,00893$; denn es ist $0,00893 = \frac{893}{100000}$, aber $0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1000}{100000}$; da nun $1000 > 893$ ist, so ist auch $0,01 > 0,00893$.

5) Wenn man daher einen Decimalbruch auf die Art abkürzt, daß man die auf eine gewisse Decimalstelle folgenden Ziffern wegläßt, so ist der hierdurch begangene Fehler kleiner als eine Einheit der letzten beibehaltenen Stelle. Setzt man z. B. statt des vollständigen Bruches 25,76893 den abgekürzten Bruch 25,76, so beträgt der Fehler, um welchen der abgekürzte Bruch zu klein ist, weniger als 0,01*).

6) Ein Decimalbruch wird mit 10 multiplizirt, wenn man das Komma um eine Ziffer von der Linken nach der Rechten fortschiebt; denn der Nenner erhält in diesem Falle eine Null weniger; er ist folglich durch 10 dividirt, also der Bruch mit 10 multiplicirt worden. So ist z. B.

$$2,834 = \frac{2834}{1000} \text{ und } 28,34 = \frac{2834}{100},$$

also

$$28,34 = 10 \,.\, 2,834.$$

7) Ein Decimalbruch wird daher umgekehrt durch 10 dividirt, wenn man das Komma um eine Ziffer von der Rechten nach der Linken fortschiebt.

8) Ein Decimalbruch bleibt ungeändert, wenn man demselben an der rechten Seite eine Null anhängt; denn es erhält hierdurch sowohl der Zähler, als auch der Nenner eine Null hinzugefügt; beide sind also mit 10 multiplicirt worden, und folglich ist der Bruch ungeändert geblieben. So ist z. B.

$$37,5 = \frac{375}{10}$$

und

$$37,50 = \frac{3750}{100} = \frac{375}{10} = 37,5.$$

---

*) Ist die auf die letzte beibehaltene Stelle folgende Ziffer < 5, so ist der abgekürzte Bruch um weniger, als eine halbe Einheit der letzten beibehaltenen Stelle kleiner, als der vollständige Bruch. Ist dagegen die erste weggelassene Ziffer $= 5$ oder, wie in dem obigen Beispiele, > 5 und man vergrößert die letzte beibehaltene Ziffer (6) um Eins, so wird der abgekürzte Bruch 25,77 zu groß, aber der Fehler übersteigt auch jetzt nicht eine halbe Einheit der letzten beibehaltenen Stelle.

III.

1) Bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches $\frac{5}{8}$ in einen Decimalbruch verfährt man in der Art, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{array}{r|l|l}
8 & 5{,}0 & 0{,}625 \\
 & 4{,}8 & \\
\hline
 & 20 & \\
 & 16 & \\
 & 40 & \\
 & 40 &
\end{array}$$

Hier ist zuerst mit dem Nenner 8 in den Zähler 5 dividirt, was zum Quotienten 0 Ganze gibt; hierauf sind die 5 Ganzen durch Anhängen einer Null in 5,0 = 50 Zehntel verwandelt und durch die Division mit 8 sind zum Quotienten 6 Zehntel und zum Reste 2 Zehntel erhalten worden; weiter sind dann diese 2 Zehntel durch Anhängung einer Null in 20 Hundertel verwandelt worden, was bei der Division mit 8 zum Quotienten 2 Hundertel und zum Reste 4 Hundertel gibt. Endlich sind diese 4 Hundertel durch nochmalige Anhängung einer Null in 40 Tausendtel verwandelt und bei der Division durch 8 ist zum Quotienten 5 Tausendtel erhalten worden, ohne daß ein Rest bleibt. Hiernach ist also $\frac{5}{8} = 0{,}625$.

2) Wendet man das nämliche Verfahren auf den Bruch $\frac{4}{7}$ an, so ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{r|l|l}
7 & 4{,}0 & 0{,}571428\,.\,. \\
 & 3{,}5 & \\
\hline
 & 50 & \\
 & 49 & \\
 & 10 & \\
 & 7 & \\
 & 30 & \\
 & 28 & \\
 & 20 & \\
 & 14 & \\
 & 60 & \\
 & 56 & \\
 & 4 &
\end{array}$$

Da hier nach Anhängung von 6 Nullen im Reste der ursprüngliche Dividendus 4 wiederkehrt, so müssen sich auch bei fortgesetzter Division im Quotienten die nämlichen Ziffern wiederholen. Die Rechnung kann folglich niemals aufgehn, wie weit man dieselbe auch fortsetzen mag. Man kann daher auch den gemeinen Bruch $\frac{4}{7}$ niemals vollständig, sondern nur näherungsweise als Decimalbuch ausdrücken.

3) Was wir von dem Bruche $\frac{4}{7}$ gesehen haben, gilt von der Mehrzahl der gemeinen Brüche. Die meisten Brüche lassen sich nicht vollständig als Decimalbrüche ausdrücken, indem, wie weit man auch die Rechnung fortsetzt, immer noch ein Rest bleibt. Bricht man die Rechnung an irgend einer Stelle ab, so erhält man einen Näherungswerth, welcher sich (zufolge Nr. II, 5) von dem gegebenen gemeinen Bruche um weniger, als eine Einheit der letzten berechneten Decimalstelle unterscheidet. Der Fehler wird

also um so kleiner, je größer die Zahl der berechneten Decimalstellen ist; er würde aber nur dann verschwinden, wenn man die Rechnung ins Unendliche fortsetzen könnte. Einen solchen ohne Ende fortlaufenden Decimalbruch, welchen man wohl sich denken, aber nicht wirklich darstellen kann, (weil man, um denselben darzustellen, unendlich viele Ziffern hinschreiben müßte), nennt man einen irrationalen Decimalbruch.

4) Bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch können also überhaupt zwei Fälle stattfinden, entweder die Rechnung geht auf, oder sie geht nicht auf. Im letzteren Falle müssen von irgend einer Stelle an die nämlichen Ziffern beständig wiederkehren; denn wenn man z. B., wie in dem zuletzt berechneten Exempel, mit dem Nenner 7 dividirt, so können höchstens 6 verschiedene Reste bleiben, weil ja der Rest immer kleiner sein muß, als der Divisor. Es muß daher spätestens nach Anhängung von 6 Nullen der Dividendus oder einer der früheren Reste und folglich auch im Quotienten die nämliche Folge der Ziffern wiederkehren. Man nennt einen solchen Decimalbruch, bei welchem von einer gewissen Stelle an immer dieselben Ziffern wiederkehren, einen periodischen Decimalbruch und die wiederkehrenden Ziffern die Periode. Der Bruch heißt rein periodisch, wenn die Ziffern von der ersten an wiederkehren, unrein periodisch, wenn der Periode noch andere Ziffern vorangehen. So ist z. B. 0,545454... ein rein periodischer, 0,93762762762.. ein unrein periodischer Decimalbruch.

5) Zur Uebung in der Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche können folgende Beispiele dienen:

1) $\frac{3}{4} = 0{,}75$	2) $\frac{4}{25} = 0{,}16$
3) $\frac{7}{8} = 0{,}875$	4) $\frac{11}{16} = 0{,}6875$
5) $\frac{27}{32} = 0{,}84375$	6) $\frac{3}{50} = 0{,}06$
7) $\frac{1}{125} = 0{,}008$	8) $\frac{1}{40} = 0{,}025$
9) $\frac{3}{800} = 0{,}00375$	10) $\frac{1}{625} = 1{,}0016$
11) $\frac{2}{3} = 0{,}66666..$	12) $\frac{1}{6} = 0{,}16666..$
13) $\frac{5}{9} = 0{,}55555..$	14) $\frac{7}{12} = 0{,}58333..$
15) $\frac{8}{15} = 0{,}53333..$	16) $\frac{5}{11} = 0{,}454545..$

17) $\frac{6}{7} = 0{,}8571428..$ (Periode 857142)

18) $\frac{9}{22} = 0{,}40909..$ (Periode 09)

19) $\frac{12}{13} = 0{,}9230769..$ (Periode 923076)

20) $\frac{7}{19} = 0{,}368421052631578947368..$

IV.

Wir wenden uns nun zu der umgekehrten Aufgabe, einen periodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln. Wir unterscheiden hier zwei Fälle:

1) Wenn ein rein periodischer Decimalbruch: z. B. 0,486486 .. gegeben ist. Man setze

$$x = 0{,}486486\,..$$

und multiplicire beiderseits mit 1000, (mit einer Eins und so viel Nullen, als die Periode Ziffern hat); dann erhält man

$$1000x = 486{,}486486\,..$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung die vorhergehende, so ergibt sich

$$999x = 486,$$

also

$$x = \frac{486}{999} = \frac{18}{37}.$$

2) Wenn ein unrein periodischer Bruch, z. B. 0,1022727 .. gegeben ist; so setzt man wieder

$$x = 0{,}1022727\,..$$

Multiplicirt man zunächst beiderseits mit 1000, (einer Eins und so viel Nullen, als Ziffern vor der Periode stehen), so erhält man

$$1000x = 102{,}2727\,..$$

und wenn man hierauf noch mit 100, (einer Eins und so viel Nullen, als die Periode Ziffern hat), multiplicirt,

$$100000x = 10227{,}2727\,..$$

Subtrahirt man nun die vorletzte Gleichung von der letzten, so ergibt sich

$$99000x = 10125,$$

also

$$x = \frac{10125}{99000} = \frac{9}{88}.$$

Uebungsbeispiele.

1) $0{,}333\,.. = \frac{1}{3}$

2) $0{,}2727\,.. = \frac{3}{11}$

3) $0{,}8484\,.. = \frac{28}{33}$

4) $0{,}135135\,.. = \frac{5}{37}$

5) $0{,}783783\,.. = \frac{29}{37}$

6) $0{,}945945\,.. = \frac{35}{37}$

7) $0{,}35463546\,.. = \frac{394}{1111}$

8) $0{,}4666\,.. = \frac{7}{15}$

9) $0{,}8333\,.. = \frac{5}{6}$

10) $0{,}59090\,.. = \frac{13}{22}$

11) $0{,}91666\,.. = \frac{11}{12}$

12) $0{,}113636\,.. = \frac{5}{44}$

13) $0{,}32727\,.. = \frac{18}{55}$

14) $0{,}4729729\,.. = \frac{35}{74}$

15) $0{,}83954954\,.. = \frac{9319}{11100}.$

V.

Decimalbrüche werden addirt oder von einander subtrahirt, wenn man Komma unter Komma setzt und dann eben so verfährt wie bei ganzen Zahlen. — Denn indem man Komma unter Komma setzt, kommen Ganze unter Ganze, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w. zu stehen.

(Wenn der Minuend weniger Decimalstellen enthält, als der Subtrahend, so ersetzt man die fehlenden Stellen durch Nullen).

Uebungsbeispiele.

A. Addition.

1) 32,5	2) 3,7	3) 52,86	4) 765,2	5) 72,56
44,3	4,9	70,3	39,468	0,0729
76,8	8,6	123,16	804,668	72,6329

6) 37,84	7) 0,872	8) 502,356	9) 1,345
16,9	0,73	27,824	27,63
7,321	0,904	195,3	0,0421
62,061	2,506	632,152	345
		1357,632	374,0171

10) 3085,7	11) 2,749
492,35	305,62
6581,24	45,306
93	2893,7
426,753	0,3594
591,29	688,29
11270,333	3936,0244

B. Subtraction.

1) 76,5	2) 528,6	3) 0,729	4) 8,297	5) 0,0352
53,4	94,8	0,561	4,6	0,029
23,1	433,8	0,168	3,697	0,0062

6) 8,9	7) 325,4	8) 195	9) 0,056	10) 54
6,75	88,568	183,274	0,00297	0,725309
2,15	236,832	11,726	0,05303	53,274691

VI.

Decimalbrüche werden mit einander multiplicirt, wenn man ihre Zähler mit einander multiplicirt und vom Producte so viel Decimalstellen abschneidet, als beide Brüche zusammen haben. — Denn Brüche werden multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt; da hier jeder Nenner so viel Nullen, als der Bruch Decimalstellen und daher der neue Nenner so viel Nullen hat, als beide gegebene Nenner zusammen haben, so hat folglich das Product der Decimalbrüche so viel Decimalstellen, als beide Brüche zusammen haben.

Uebungsbeispiele.

1) $345,7 \times 8 = 2765,6$
2) $43,5 \times 27 = 1174,5$
3) $3,0867 \times 73 = 225,3291$
4) $29,68 \times 145 = 4303,6$
5) $0,00549 \times 18 = 0,09882$
6) $0,625 \times 36 = 22,5$
7) $5,4 \times 400 = 2160$
8) $0,016 \times 6250 = 100$
9) $5,8 \times 3,4 = 19,72$
10) $72,9 \times 0,15 = 10,935$
11) $56,027 \times 4,38 = 245,39826$
12) $5,428 \times 0,094 = 0,510232$
13) $0,0005278 \times 3,05 = 0,00160979$

14) 0,52 × 0,76 = 0,3952
15) 0,0329 × 0,04 = 0,001316
16) 0,00526 × 0,037 = 0,00019462
17) 0,00416 × 0,25 = 0,00104.

VII.

Bei der Division der Decimalbrüche unterscheiden wir folgende Fälle:

1) Wenn Divisor und Dividendus ganze Zahlen sind, so ist das Verfahren dasselbe, wie bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch. (Siehe oben Nro. III.)

2) Wenn der Divisor und Dividendus gleichviel Decimalstellen, also gleiche Nenner haben, so dividirt man (nach demselben Verfahren) ihre Zähler durcheinander.

3) Wenn aber der Divisor und Dividendus eine ungleiche Zahl von Decimalstellen haben, so bringt man sie vorher auf gleichen Nenner, indem man demjenigen, welcher weniger Decimalstellen hat, so lange Nullen anhängt, bis er mit dem andern gleichviel Decimalstellen hat, und verfährt dann wie in (2).

Ist z. B. 5,6 durch 0,972 zu dividiren und der Quotient bis zur dritten Decimalstelle darzustellen, so ist die Rechnung folgende:

```
0,972 | 5,600 | 5,761 . .
      | 4860  |
      ---------
          7400
          6804
          ----
           5960
           5832
           ----
            1280
             972
             ---
             308
```

Uebungsbeispiele.

1) 36 : 25 = 1,44
2) 279 : 16 = 17,4375
3) 4276 : 12 = 356,333 . .
4) 8 : 25 = 0,32
5) 1 : 360 = 0,00277 . .
6) 5 : 76 = 0,065789 . .
7) 7,2 : 1,8 = 4
8) 9,62 : 0,26 = 37
9) 21,42 : 3,75 = 5,712
10) 0,847 : 0,059 = 14,355932 . .
11) 0,32 : 82,05 = 0,00390 . .
12) 8,2 : 0,13 = 63,07692 . .
13) 0,36 : 0,0035 = 102,85714 . .
14) 5,2 : 1,086 = 4,78821 . .
15) 8 : 3,7 = 2,16216 . .
16) 125 : 0,44 = 284,0909 . .
17) 12 : 0,075 = 160
18) 797,4 : 6 = 132,9
19) 5,81 : 7 = 0,83
20) 0,7 : 80 = 0,00875
21) 0,52 : 32 = 0,01625
22) 25,7 : 6 = 4,28333 . .
23) 4,32 : 19 = 0,22736 . .
24) 0,5 : 87 = 0,00574 . .
25) 3,29 : 534 = 0,00616 . .
26) 58,742 : 0,7 = 83,91714 . .
27) 0,05381 : 0,043 = 1,25139 . .
28) 0,0618 : 0,907 = 0,06813 . .
29) 793,46 : 0,5294 = 1498,78 . .
30) 792,5 : 0,048 = 16510,4166 . .
31) 0,831275 : 2,75 = 0,30228 . .
32) 0,03258 : 8,29 = 0,00393 . .

D. Von den algebraischen Summen.

§. 84. Erklärung.

Eine Differenz mit gleichem Minuend und Subtrahend heißt Null und wird mit 0 bezeichnet.

Nach §. 23, 1 ist $a - a = (a + b) - (a + b)$
und auch $b - b = (a + b) - (a + b)$,
folglich ist $a - a = b - b$.

§. 85. Lehrsatz.

Ein Ausdruck bleibt ungeändert, wenn man Null zu demselben addirt oder von demselben subtrahirt, in Zeichen:

$$1)\quad a + 0 = a \qquad 2)\quad a - 0 = a.$$

Beweis. Man setze statt 0 eine Differenz mit gleichem Minuend und Subtrahend, z. B. $b - b$; so ist

$$a + 0 = a + (b - b).$$

Nach §. 16 wird eine Zahl a zu einer Differenz $b - b$ addirt, wenn man sie zum Minuenden addirt; wir können daher für den vorhergehenden Ausdruck auch setzen $(a + b) - b$
und hierfür nach §. 14 a, w. z. b. w.

2) Die Gleichung (2) ist richtig, weil das Resultat a zum Subtrahenden 0 addirt nach Nro. 1 den Minuenden a zur Summe gibt.

§. 86. Zusatz.

Man spricht die Regeln des vorhergehenden §. im Praktischen gewöhnlich kurz so aus: Null addirt und subtrahirt nicht.

§. 87. Lehrsatz.

Null, mit einem Ausdrucke multiplicirt oder durch einen Ausdruck dividirt, gibt wieder Null, in Zeichen:

$$1)\quad 0 \,.\, a = 0. \qquad 2)\quad 0 : a = 0.$$

Bew. 1) Man setze statt 0 eine Differenz mit gleichem Minuend und Subtrahend, z. B. $b - b$; so ist

$$a \,.\, 0 = a \,.\, (b - b).$$

Nach §. 33 wird eine Zahl a mit einer Differenz $b - b$ multiplicirt, wenn man sie mit dem Minuenden und Subtrahenden multiplicirt; wir erhalten daher für den vorhergehenden Ausdruck

$$ab - ab,$$

wofür wir auch bloß 0
setzen können, weil jede Differenz mit gleichem Minuend und Subtrahend gleich Null ist.

2) Die Gleichung (2) ist richtig, weil das Resultat 0 mit dem Divisor a multiplicirt nach Nro. 1 den Dividendus 0 zum Produkt gibt.

§. 88. Zusatz.

Dagegen ist es niemals erlaubt, eine Zahl durch Null zu dividiren. Denn wollte man z. B. 7 durch Null dividiren, so würde man statt $7 : 0$ weder 7, noch irgend eine andere Zahl setzen können, weil jede Zahl mit 0 multiplicirt immer wieder Null, niemals aber 7 gibt. Wollte man sich erlauben, Null durch Null zu dividiren, so würde man statt des Quotienten $0 : 0$ jede beliebige Zahl, z. B.

$$\frac{0}{0} = 7 \text{ oder } \frac{0}{0} = 1000$$

setzen können, weil $0 \,.\, 7$ oder $0 \,.\, 1000 = 0$ ist, überhaupt jede Zahl, mit Null multiplicirt, Null gibt. Auf diese Art könnte es geschehen, daß man zu ganz widersprechenden Resultaten gelangte. So ist z. B. die Gleichung

$$0 \,.\, 7 = 0 \,.\, 1000$$

nach §. 87 unbedingt richtig. Erlaubt man sich aber, diese Gleichung durch Null zu dividiren, so erhält man das widersinnige Resultat

$$7 = 1000.$$

Hiernach ist es also niemals erlaubt, eine Zahl durch Null zu dividiren.

§. 89. Erklärung.

Wenn mehrere Zahlen nach der Reihe theils addirt, theils subtrahirt werden sollen, so pflegt man dieselben mit Auslassung der Klammern, welche die Ordnung anzeigen, in welcher dieses geschehen soll*), hintereinander zu schreiben und nennt den so entstandenen Ausdruck eine algebraische Summe und die einzelnen zu addirenden oder zu subtrahirenden Ausdrücke die Glieder derselben, z. B. $5 + 7 - 4 - 6 + 9 = 11.$

Eine algebraische Summe ist also ein Ausdruck, welcher entsteht, wenn man mehrere Zahlen nach der Reihe addirt oder subtrahirt.

Man unterscheidet in einer algebraischen Summe die additiven Glieder, vor denen das Zeichen (+) steht, und die subtractiven Glieder vor denen (—) steht. So sind z. B. in der obigen algebraischen Summe die Glieder 7 und 9 additiv, 4 und 6 aber subtractiv. Das erste Glied 5, welches kein Vorzeichen hat, ist als additiv zu betrachten, wie erstens daraus hervorgeht, daß man die obige algebraische Summe auch so schreiben kann:

$$7 + 5 - 4 - 6 + 9,$$

und zweitens daraus folgt, daß man, ohne den Werth der algebraischen Summe zu ändern, derselben noch das Glied 0 vorsetzen und also schreiben kann $0 + 5 + 7 - 4 - 6 + 9.$

§. 90. Zusatz.

1) In den §§. 7 und 18 haben wir gesehen, daß, wenn mehrere Zahlen addirt oder subtrahirt werden sollen, es einerlei ist, in welcher Ordnung man dies thut. Wir schließen hieraus, daß auch in einer algebraischen Summe die Glieder beliebig geordnet werden dürfen.

2) Man kann eine algebraische Summe auch mit einem subtractiven Gliede anfangen und z. B. die obige Summe

$$7 + 5 - 4 - 6 + 9$$

auch so schreiben: $-4 + 7 + 5 - 6 + 9,$
so wie man ja von einer Differenz auch zuerst den Subtrahenden und dann den Minuenden angeben kann.

3) Jeder mehrgliederige Ausdruck ist ein specieller Fall einer algebraischen Summe; derselbe ist nämlich eine algebraische Summe, in welcher alle Glieder additiv sind.

4) Wenn in einer algebraischen Summe zwei gleiche Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkommen, so heben sich dieselben auf; so ist z. B. (nach §. 14)

$$6 + 8 - 8 = 6,$$

oder in allgemeinen Zeichen

$$a + b - b = a.$$

---

*) Nicht mit unbedingter Auslassung aller Klammern; ist ein subtractives Glied einer algebraischen Summe selbst wieder eine algebraische Summe, so muß dasselbe in Klammern eingeschlossen werden. Eben so dürfen bei zusammengesetzten Producten die Klammern niemals weggelassen werden.

§. 91. Erklärung.

Wenn man ein einzelnes Glied einer algebraischen Summe für sich allein betrachten, aber zugleich anzeigen will, ob dasselbe additiv oder subtractiv ist, so schreibt man ihm Zeichen (+) oder (—) vor, z. B.

$$+ 9, \; - 6.$$

Man nennt den so entstandenen Ausdruck einen additiven oder subtractiven Ausdruck. Man versteht also unter einer additiven oder subtractiven Zahl eine solche, bei welcher zugleich angegeben ist, ob sie als additiv oder subtractiv gedacht werden soll.

Ein bequemes Mittel zur Veranschaulichung der additiven und subtractiven Zahlen bietet die Vergleichung mit Vermögen und Schulden oder Gewinn und Verlust, Einnahme und Ausgabe u. dgl. dar.

§. 92. Erklärung.

Zwei additive oder subtractive Zahlen algebraisch addiren, heißt sie durch eine additive oder subtractive Zahl ersetzen.

§. 93, a. Lehrsatz.

Beim Addiren additiver und subtractiver Zahlen verfährt man auf folgende Art:

1) $+ 9 + 6 = + 15$
2) $- 9 - 6 = - 15$
3) $+ 9 - 6 = + \;3$
4) $- 9 + 6 = - \;3$

oder in allgemeinen Zeichen:

1) $+ a + b = + (a + b)$
2) $- a - b = - (a + b)$
3) $+ a - b = + (a - b)$
4) $- a + b = - (a - b)$

Bew. 1) Denn es ist (nach §. 8) einerlei, ob man zu einer Zahl erst 9 und dann 6 oder auf einmal 15 addirt.

2) Es ist (nach §. 19) einerlei, ob man von einer Zahl erst 9 und dann 6 oder auf einmal 15 subtrahirt.

3) Es ist (nach §. 16) einerlei, ob man zu einer Zahl erst 9 addirt und dann 6 subtrahirt oder bloß 3 addirt.

4) Es ist (nach §. 22) einerlei, ob man von einer Zahl 9 subtrahirt und 6 addirt oder bloß 3 subtrahirt.

Die in den obigen 4 Gleichungen enthaltenen Regeln lassen sich bequem so aussprechen:

1) Additive und additive Zahlen vermehren sich.
2) Subtractive und subtractive Zahlen vermehren sich.
3) und 4) Additive und subtractive Zahlen vermindern sich*).

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich eine wesentliche Verschiedenheit des algebraischen und des eigentlichen oder arithmetischen Addirens, indem das algebraische Addiren bald durch arithmetisches Addiren, bald durch arithmetisches Subtrahiren bewerkstelligt wird.

---

*) Diese Regeln sollen jedoch nur zur Veranschaulichung der obigen abstracten Formeln dienen. Während aber diese Formeln richtig bleiben, was auch immer die Buchstaben a und b für Werthe haben mögen, gelten die in Worten angegebenen Regeln nur, wenn a und b absolute ganze oder gebrochene Zahlen bezeichnen; sie sind dagegen nicht mehr unbedingt richtig, wenn man statt a und b Null oder negative Zahlen setzt.

§. 93, b. Zusatz.

Ein additiver und ein subtractiver Ausdruck mit gleichem Gliede geben zur Summe Null, in Zeichen:

$$+ a - a = 0.$$

Bew. Denn wenn man zu irgend einer Zahl eine andere Zahl a addirt und die nämliche Zahl a wieder subtrahirt, so bleibt die erstere Zahl unverändert; das nämliche ist nach §. 85 der Fall, wenn man Null zu einer Zahl addirt.

Uebungsbeispiele.

1) $+ 10 + 8 = + 18$

2) $+ 12 - 9 = + 3$

3) $+ 5 - 12 = - 7$

4) $- 4 - 8 = - 12$

5) $+ 5a + 9a = + 14a$

6) $+ 8b - 3b = + 5b$

7) $- 2c - 7c = - 9c$

8) $- 12d + 8d = - 4d$

9) $+ 5x - 13x = - 8x$

10) $- 2u + 7u = + 5u$

11) $- 4y - 6y = - 10y$

12) $- 3a^2 - 12a^2 = - 15a^2$

13) $12e + 4e - 9e = + 7e$

14) $- 5f + 8f - 10f = - 7f$

15) $8g - 3g + 7g - 9g - 4g + 8g = + 7g$

16) $3h + 5h - 12h + h + 8h - 10h - 4h = - 9h$

17) $- 4m + 5m + 8m - 12m - 7m + 10m = 0$

18) $3ab - 2ab - 9ab + 4ab - 6ab - 2ab = - 12ab$

19) $- 9a^2 - 2a^2 + 5a^2 + 8a^2 - 7a^2 + 9a^2 = + 4a^2$

20) $x^3 - 7x^3 + 3x^3 + 8x^3 - 12x^3 - x^3 = - 8x^3$

§. 94. Zusatz.

Wenn algebraische Summen addirt werden sollen, so schreibt man die gleichnamigen Glieder unter einander und verfährt im übrigen nach den in §. 93 enthaltenen Regeln.

Uebungsbeispiele.

1)
$$\begin{array}{rrr} 3a & - 5b & + 2c \\ - 7a & + 9b & + 4c \\ \hline - 4a & + 4b & + 6c \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rrr} - 5a & + 6b & + 8c \\ 8a & - 3b & + 4c \\ - 2a & + 7b & - c \\ \hline a & + 10b & + 11c \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{rrrr} 8a & - 2b & - 9c & + d \\ 5a & + 5b & + 6c & - 5d \\ - 4a & + 6b & - 9c & + 8d \\ 12a & - 20b & + c & + 5d \\ \hline 21a & - 11b & - 11c & + 9d \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{rrr} - 3d & + 2e & - 5f \\ 5d & - 6e & \\ 4d & - 9e & + 2f \\ & 5e & - 7f \\ - 8d & + 2e & - 5f \\ 12d & & + f \\ \hline 10d & - 6e & - 14f \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{rrrrr} 2a & + 3b & + 5c & & \\ - 7a & & + 8c & + 9d & \\ - 5a & + 2b & - 3c & - 4d & - e \\ 8a & & & + 3d & + 5e \\ - 4a & - 2b & + 3c & & - 7e \\ - 2a & + 5b & + 6c & - 9d & + 2e \\ \hline - 8a & + 8b & + 19c & - d & - e \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{rrr} 5a^2 & - 3ab & + 7b^2 \\ - 4a^2 & + 8ab & - 9b^2 \\ 7a^2 & + 4ab & - 5b^2 \\ a^2 & - 9ab & + 4b^2 \\ \hline 9a^2 & & - 3b^2 \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{rrrr} 4cd & + 5de & - 2fg & + 3h^2 \\ - 2cd & & + 3fg & - h^2 \\ 8cd & - 3de & & + 4h^2 \\ - 5cd & + 8de & - 2fg & + 7h^2 \\ - 2cd & & + 6fg & - 2h^2 \\ \hline + 3cd & + 10de & + 5fg & + 11h^2 \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{rrr} 4ab^2 & + 4cde & - 6h^3 \\ 2ab^2 & & + 3h^3 \\ - 7ab^2 & - 9cde & \\ ab^2 & + 2cde & - 5h^3 \\ \hline & - 3cde & - 8h^3 \end{array}$$

§. 95. Erklärung.

Eine additive oder subtractive Zahl von einer andern algebraisch subtrahiren heißt eine dritte additive oder subtractive Zahl finden, welche zum Subtrahenden addirt den Minuenden zur Summe gibt.

§. 96. Lehrsatz.

Eine additive oder subtractive Zahl wird subtrahirt, wenn man sie mit umgekehrtem Vorzeichen addirt; in Zeichen:

$$1)\quad a - (+b) = a + (-b)$$

$$2)\quad a - (-b) = a + (+b).$$

Bew. Die Gleichung (1) ist richtig, da (nach §. 90, 4)

$$a + (-b) + (+b) = a$$

ist. — Eben so wird die Gleichung (2) erwiesen.

Wenn man von der Zahl $+12$ die Zahl $+8$ subtrahirt, so ist die Differenz offenbar $= +4$. Dieses nämliche Resultat wird auch erhalten, wenn man zu $+12$ die Zahl -8 algebraisch addirt. Demnach ist es einerlei, ob man von der Zahl $+12$ die Zahl $+8$ subtrahirt oder zu $+12$ die Zahl -8 addirt.

Wenn ferner von -13 subtrahirt werden soll -7, so ist die Differenz offenbar $= -6$. Dieses nämliche Resultat wird auch erhalten, wenn man zu -13 algebraisch $+7$ addirt. Hiernach ist es also einerlei, ob man von -13 algebraisch -7 subtrahirt oder zu -13 algebraisch $+7$ addirt.

§. 97. Zusatz.

Man spricht den vorhergehenden Lehrsatz gewöhnlich kurz so aus: Subtrahiren heißt mit umgekehrtem Zeichen addiren.

Hiernach läßt sich jede Subtractionsaufgabe leicht in eine Additionsaufgabe verwandeln. Heißt z. B. die Aufgabe: Von $+9$ subtrahire $+15$, so ist dies eben so viel, als: zu $+9$ addire -15, und das Resultat ist folglich $= -6$. Eben so ist

$$(-7) - (-10) = (-7) + (+10) = +3$$

$$(+5) - (-8) = (+5) + (+8) = +13$$

$$(-4) - (+6) = (-4) + (-6) = -10 \text{ u. dgl. m.}$$

§. 98. Zusatz.

Nach §. 19 wird eine Summe subtrahirt, wenn man die einzelnen Summanden subtrahirt. Wenn daher zwei algebraische Summen von einander subtrahirt werden sollen, so kehrt man im Subtrahenden alle Zeichen um und addirt dann die gleichnamigen Glieder des Minuenden und Subtrahenden.

Heißt z. B. die Subtractionsaufgabe

$$3a - 5b + 2c - 8d - 5e,$$

davon subtrahirt: $\quad 5a + 8b - 7c - 9d + 4e$*),

so ist dieselbe in die Additionsaufgabe zu verwandeln

$$\begin{array}{lr} & 3a - 5b + 2c - 8d - 5e, \\ \text{dazu addirt} & -5a - 8b + 7c + 9d - 4e, \\ \hline \text{gibt zur Summe} & -2a - 13b + 9c + d - 9e. \end{array}$$

Auf gleiche Weise sind die folgenden Subtractionsexempel zu behandeln.

$$1)\quad \begin{array}{r} 3d + 2e - 4f + 5g \\ 9d - 5e + 6f - 3g \\ \hline -6d + 7e - 10f + 8g \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{r} -5c + 3d - 4e + 8f + 3g \\ -9c + 5d + 8e - 2f \\ \hline +4c - 2d - 12e + 10f + 3g \end{array}$$

---

*) Da das erste Glied im Subtrahenden 5a kein Vorzeichen hat, so ist dasselbe als additiv anzusehen und also $= +5a$; bei der Umkehrung der Zeichen wird daher $-5a$ daraus.

3) $$\begin{array}{r} -9a + 2b + 8c \\ 3a - 4b - 5c + 8d \\ \hline -12a + 6b + 13c - 8d \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} 3a^2 - 5ab + 6b^2 \\ -4a^2 - 5ab - 2b^2 \\ \hline 7a^2 + 8b^2 \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} -2c + 5e + 3f - 4g \\ -8c + 9d + 6e + g - h \\ \hline 6c - 9d - e + 3f - 5g + h \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} a - 3b \\ -4a + 7b + c \\ \hline 5a - 10b - c. \end{array}$$

§. 99. Zusatz.

Zufolge des Vorhergehenden kann man jede Differenz, z. B. $a - b$, auch als eine algebraische Summe, nämlich als die Summe aus $+ a$ und $- b$ ansehen, da es nach §. 96 einerlei ist, ob man von der Zahl a die Zahl b subtrahirt oder zu a die Zahl $- b$ algebraisch addirt. Dies gewährt die Bequemlichkeit, daß man in der Algebra gar nicht nöthig hat, besondere Regeln über Differenzen aufzustellen, indem dieselben in den Regeln über die algebraischen Summen mit enthalten sind.

§. 100. Erklärung.

Wenn in einer algebraischen Summe ein oder mehrere Glieder selbst wieder algebraische Summen und daher in Klammern eingeschlossen sind, so nennt man ein solches Glied ein *zusammengesetztes*. So sind z. B. in der algebraischen Summe

$$5a - 2b + (3a - 2b) - (2a + 6b - 5c) - 7c$$

das dritte Glied $3a - 2b$ und das vierte Glied $2a + 6b - 5c$ zusammengesetzt.

§. 101. Zusatz.

Wenn man in einer algebraischen Summe mit zusammengesetzten Gliedern die *Klammern auflösen*, d. h. die einzelnen Glieder ohne Klammern schreiben will, so hat man folgendes zu beachten: Wenn vor einem zusammengesetzten Ausdrucke das Zeichen $+$ steht, so soll der Ausdruck addirt werden, und es sind daher die einzelnen Glieder mit unveränderten Zeichen hinzuschreiben; wenn aber vor einem zusammengesetzten Ausdrucke das Zeichen $(-)$ steht, so soll derselbe *subtrahirt* werden, und man muß daher die einzelnen Glieder mit *umgekehrten Zeichen* hinschreiben.

So ist z. B.

$$5a - 2b + (3a - 2b) - (2a + 6b - 5c) - 7c$$
$$= 5a - 2b + 3a - 2b - 2a - 6b + 5c - 7c.$$

Zieht man noch die gleichnamigen Glieder zusammen, so verwandelt sich die vorstehende algebraische Summe in

$$6a - 10b - 2c.$$

Eben so ist

$$3a^2 - (5a^2 - 4ab) - (5ab + b^2) + (3a^2 + b^2)$$
$$= 3a^2 - 5a^2 + 4ab - 5ab - b^2 + 3a^2 + b^2$$
$$= a^2 - ab.$$

Uebungsbeispiele.

1) $-a + (8a - 2b + 5c) - (7b + 3c) = 7a - 9b + 2c$
2) $4a - 2b + 6c - (3a - 5c) - (9a - b + 3c) = -8a - b + 8c$
3) $-(a + 5b) + 5c + (3a + 8b) - (2a - c) = 3b + 6c$
4) $5a^2 - (-2ab + 3b^2) - (a^2 - 3ab + b^2) = 4a^2 + 5ab - 4b^2$
5) $(a + b) - (a - b) = 2b$
6) $(a - b) - (a + b) = -2b$
7) $(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$

8) $3ax + (7a^2 - 2ax) - (3a^2 + ax - 5x^2) = 4a^2 + 5x^2$
9) $-5x^2 + 3ax - (a^2 - 4ax) - (5ax + x^2) = -a^2 + 2ax - 6x^2$
10) $-(5a + b - 3c) + 5b - (-4a + b - 2c) - 3b + 7c = -a + 12c.$

§. 102. Erklärung.

In §. 31 und 33 haben wir gesehen, daß

$$(a + b) . c = a . c + b . c$$

und

$$(a - b) . c = a . c - b . c$$

ist. Wir ziehen hieraus den Schluß, daß 1) eine Zahl c mit einem additiven Ausdrucke + b multiplicirt wird, wenn man die Zahl c mit dem Gliede des additiven Ausdrucks b multiplicirt und das entstandene Product b . c addirt, und 2) daß eine Zahl c mit einem subtractiven Ausdrucke — b multiplicirt wird, wenn man die Zahl c mit dem Gliede b des subtractiven Ausdruckes multiplicirt und das entstandene Product b . c subtrahirt.

§. 103. Lehrsatz.

Bei dem Multipliciren additiver und subtractiver Zahlen verfährt man in folgender Art:

1) $(+3) . (+4) = +12$
2) $(+3) . (-4) = -12$
3) $(-3) . (+4) = -12$
4) $(-3) . (-4) = +12$

oder in allgemeinen Zeichen:

1) $(+a) . (+b) = +a . b$
2) $(+a) . (-b) = -a . b$
3) $(-a) . (+b) = -a . b$
4) $(-a) . (-b) = +a . b$

Bew. 1) $(+3) . (+4)$ heißt: + 4 soll dreimal addirt werden; dies gibt + 12; und das entstandene Product soll addirt werden; also bleibt es + 12.

2) $(+3) . (-4)$ heißt: — 4 soll dreimal addirt werden; dies gibt — 12; und das entstandene Product soll addirt werden, also bleibt es — 12.

3) $(-3) . (+4)$ heißt: + 4 soll dreimal addirt werden; dies gibt + 12; und das entstandene Product soll subtrahirt werden; also verwandelt es sich in — 12; denn subtrahiren heißt mit umgekehrtem Zeichen addiren.

4) $(-3) . (-4)$ heißt: — 4 soll dreimal addirt werden; dies gibt — 12; und das entstandene Product soll subtrahirt werden; also verwandelt es sich in + 12.

Man spricht die in den obigen vier Gleichungen enthaltenen Regeln gewöhnlich kurz so aus:

Beim Multipliciren geben gleiche Zeichen (+), ungleiche (—).

Uebungsbeispiele.

1) $+8 . -7 = -56$
2) $-5 . -6 = +30$
3) $+5 . +4 = +20$
4) $-3 . +9 = -27$
5) $+8a . -5b = -40ab$
6) $-3ac . -4bd = +12abcd$
7) $+7a^2 . -4a^3 = -28a^5$
8) $-9b^2c . +3c^2 = -27b^2c^3$
9) $-\frac{a}{b} . +c = -\frac{ac}{b}$
10) $+\frac{3a^2}{4bc} . +8b^4 = +\frac{6a^2b^3}{c}$
11) $-\frac{4b}{5a} . -\frac{3a}{4c} = +\frac{3b}{5c}$
12) $-6ab . +\frac{5b}{3a} = -10b^2.$

Der Anfänger wird wohl thun, zu bemerken, daß die obige Regel: „Gleiche Zeichen geben (+), ungleiche (—)", nur vom Multipliciren, keineswegs aber vom Addiren gilt; so gibt z. B. — 3 mit — 5 multiplicirt + 15; dagegen gibt — 3 zu — 5 addirt — 8. Es geben also zwei (—) Zeichen beim Multipliciren (+), beim Addiren aber wieder (—).

§. 104. Zusatz.

Zufolge §. 31 und 103 wird eine algebraische Summe mit einem additiven oder subtractiven Ausdrucke multiplicirt, wenn man jedes Glied derselben multiplicirt und bei gleichen Zeichen (+), bei ungleichen (—) vorschreibt.

Uebungsbeispiele.

1) $(5a - 3b + 7c) \,.\, -6d = -30ad + 18bd - 42cd$

2) $(-8a + 6b) \,.\, +4b = -32ab + 24b^2$

3) $\left(3d - 5e + \frac{6f}{7g}\right) \,.\, -7h = -21dh + 35eh - \frac{6fh}{g}$

4) $\left(\frac{2}{3} + 4x - \frac{5a}{6x}\right) \,.\, +\frac{3x}{a} = \frac{2x}{a} + \frac{12x^2}{a} - \frac{5}{2}$

5) $(1 + 5x - 2x^2 + 3x^3) \,.\, -2x^2 = -2x^2 - 10x^3 + 4x^4 - 6x^5$

6) $\left(-8x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}\right) \,.\, -\frac{3}{4}x^3 = 6x^7 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{8}x^3.$

§. 105. Zusatz.

Zwei algebraische Summen werden (vermöge §§. 38 und 103) mit einander multiplicirt, indem man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern multiplicirt und dem entstandenen Producte bei gleichen Zeichen (+), bei ungleichen (—) vorsetzt.

Soll z. B. $3a - 5b + 2c$ mit $-5a + 2b - 4c$ multiplicirt werden, so ist die Anordnung der Rechnung folgende:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 3a & -5b & +2c & & \\
 & -5a & +2b & -4c & & \\
\hline
-15a^2 & +25ab & -10ac & & & \\
 & +6ab & & -10b^2 & +4bc & \\
 & & -12ac & & +20bc & -8c^2 \\
\hline
-15a^2 & +31ab & -22ac & -10b^2 & +24bc & -8c^2.
\end{array}$$

Uebungsbeispiele.

1) $(3a - 2b) \,.\, (5a + 6b) = 15a^2 + 8ab - 12b^2$

2) $(4a + 7b) \,.\, (3a - 9b) = 12a^2 - 15ab - 63b^2$

3) $(3a - 4b) \,.\, (7a - 2b) = 21a^2 - 34ab + 8b^2$

4) $(-5a + 2b) \,.\, (a - 4b) = -5a^2 + 22ab - 8b^2$

5) $(a + b) \,.\, (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$*)

6) $(a - b) \,.\, (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

7) $(a + b) \,.\, (a - b) = a^2 - b^2$

8) $(a + b) \,.\, (c - d) = ac + bc - ad - bd$

9) $(e - f) \,.\, (g - h) = eg - fg - eh + fh$

10) $(8a - 2b + 5c) \,.\, (2a - b) = 16a^2 - 12ab + 10ac + 2b^2 - 5bc$

11) $(c - 4d + 7g) \,.\, (3d - 2g) = 3cd - 2cg - 12d^2 + 29dg - 14g^2$

*) Die Formeln (5), (6) und (7) sprechen wichtige Lehrsätze aus.

12) $(6a-2b+9c) \cdot (4a-b+5c) = 24a^2 - 14ab + 66ac + 2b^2 - 19bc + 45c^2$

13) $(3e+5f-2g) \cdot (4e-2f+6g) = 12e^2 + 14ef + 10eg - 10f^2 + 34fg - 12g^2$

14) $(a+b-c) \cdot (a-b+c) = a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

15) $(u-v-w) \cdot (u+v+w) = u^2 - v^2 - 2vw - w^2$

16) $(3-2x+x^2) \cdot (5-x) = 15 - 13x + 7x^2 - x^3$

17) $(7-4x-3x^2+5x^3) \cdot (2+5x) = 14 + 27x - 26x^2 - 5x^3 + 25x^4$

18) $(5a^2-2ax+x^2) \cdot (3a-x) = 15a^3 - 11a^2x + 5ax^2 - x^3$

19) $(2u^2-7uv-3v^2) \cdot (3u-2v) = 6u^3 - 25u^2v + 5uv^2 + 6v^3$

20) $(5a^2-3ax-5x^2) \cdot (3a-5x) = 15a^3 - 34a^2x + 25x^3$

21) $(1-2x+3x^2) \cdot (2+3x-4x^2) = 2 - x - 4x^2 + 17x^3 - 12x^4$

22) $(3-x+2x^2) \cdot (4-2x-x^2) = 12 - 10x + 7x^2 - 3x^3 - 2x^4$

23) $(3a^2-2ax+7x^2) \cdot (3a^2+2ax-7x^2) = 9a^4 - 4a^2x^2 + 28ax^3 - 49x^4$

24) $(7a^2+2ax-4x^2) \cdot (7a^2-2ax-4x^2) = 49a^4 - 60a^2x^2 + 16x^4$.

Wenn in den zu multiplicirenden algebraischen Summen Brüche vorkommen, so hat man beim Multipliciren der Brüche die Regeln des §. 78 zu beachten und beim Zusammenziehen der gleichnamigen Glieder die Brüche auf gleichen Nenner zu bringen; im übrigen bleibt die Rechnung dieselbe, wie das folgende Beispiel zeigt.

25)
$$\begin{array}{l} 3 + \frac{8}{3}x - \frac{3}{2}x^2 \\ 3 - \frac{1}{2}x \\ \hline 9 + 8x - \frac{9}{2}x^2 \\ \quad - \frac{3}{2}x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{3}{4}x^3 \\ \hline 9 + \frac{13}{2}x - \frac{35}{6}x^2 + \frac{3}{4}x^3 \end{array}$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

26) $\left(3 - \frac{5}{2}x\right) \cdot \left(4 + \frac{1}{6}x\right) = 12 - \frac{19}{2}x - \frac{5}{12}x^2$

27) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x\right) = \frac{1}{8} - \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x^2$

28) $(4 - 3x + 5x^2) \cdot \left(2 - \frac{3}{2}x\right) = 8 - 12x + \frac{29}{2}x^2 - \frac{15}{2}x^3$

29) $\left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 4\right) \cdot \left(\frac{4}{5}x - 3\right) = -\frac{6}{5}x^3 + \frac{151}{30}x^2 - \frac{26}{5}x + 12$

30) $(4 - 2x + x^2) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x\right) = 3 - \frac{7}{2}x + \frac{7}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^3$

31) $\left(3 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{4}x^2\right) \cdot \left(\frac{3}{5} - 4x\right) = \frac{9}{5} - \frac{21}{2}x - \frac{221}{20}x^2 + 7x^3$

32) $\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}x + \frac{1}{4}x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{3} - \frac{23}{36}x + \frac{29}{72}x^2 - \frac{1}{12}x^3$.

§. 106. Zusatz.

Besteht ein Product aus mehr als zwei Factoren, so multiplicirt man erst zwei Factoren mit einander, das entstandene Product mit dem dritten Factor u. s. w.

Uebungsbeispiele.

1) $2x \,.\, (3 - 5x) \,.\, (4 + 6x) = 24x - 4x^2 - 60x^3$
2) $5x^2 \,.\, (1 + 3x) \,.\, (2 + x - 3x^2) = 10x^2 + 35x^3 - 45x^5$
3) $(3a - 2x) \,.\, (6a + x) \,.\, (5a - x) = 90a^3 - 63a^2x - ax^2 + 2x^3$
4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5) $(2 + 3x)^4 = 16 + 96x + 216x^2 + 216x^3 + 81x^4$
6) $3ax \,.\, (4a - 2x)^2 = 48a^3x - 48a^2x^2 + 12ax^3$
7) $(6a - 3x) \,.\, (5a + 2x)^2 = 150a^3 \mp 45a^2x - 36ax^2 - 12x^3$
8) $(1 - x)^2 \,.\, (1 + x)^3 = 1 + x - 2x^2 - 2x^3 + x^4 + x^5.$

§. 107. Erklärung.

Jedes Product, in welchem ein Factor oder mehrere Factoren algebraische Summen sind, heißt ein zusammengesetztes Product, z. B.

$$2a \,.\, (3b - 5c);$$
$$(5a - 3b) \,.\, (7a + 8b - 4c) \text{ u. dgl. m.}$$

Jeder Factor, welcher eine algebraische Summe ist, muß in Klammern eingeschlossen werden.

§. 108. Zusatz.

Jedes zusammengesetze Product kann nach §. 104, 105 und 106 in eine algebraische Summe verwandelt werden. Wenn daher ein oder mehrere Glieder einer algebraischen Summe zusammengesetzte Producte sind, so läßt sich dieselbe allemal in eine algebraische Summe verwandeln, deren Glieder sämmtlich einfache Producte sind, und da durch diese Umformung die Klammern wegfallen, so nennt man dieselbe auch das Auflösen der Klammern.

Es sei z. B. die Summe

$$\text{I.}\quad 3a^2 + 5b \,.\, (3a - 2b) - (7a + 12b) \,.\, (3a - 5b)$$

gegeben. Das erste Glied 1) $3a^2$
ist ein einfaches Product und bleibt folglich unverändert stehen. Das zweite Glied $5b \,.\, (3a - 2b)$ und das dritte Glied $(7a + 12b) \,.\, (3a - 5b)$ sind zusammengesetzte Producte und können daher in algebraische Summen verwandelt werden nach folgender Ausrechnung:

$$\begin{array}{rl} & 3a - 2b \\ & \phantom{3a - {}} 5b \\ \hline 2) & 15ab - 10b^2 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} & 7a + 12b \\ & 3a - 5b \\ \hline & 21a^2 + 36ab \\ & - 35ab - 60b^2 \\ \hline 3) & 21a^2 + ab - 60b^2 \end{array}$$

Da das zweite Glied in der gegebenen algebraischen Summe (I) additiv ist, so werden die einzelnen Glieder des entwickelten Productes mit unveränderten Zeichen hingeschrieben. Das dritte Glied dagegen ist subtractiv, und die einzelnen Glieder des entwickelten Productes sind daher mit umgekehrten Zeichen hinzuschreiben. Hiernach verwandelt sich die obige Summe (I) in

$$\text{II.}\quad 3a^2 + 15ab - 10b^2 - 21a^2 - ab + 60b^2.$$

Ziehen wir endlich noch die gleichnamigen Glieder zusammen, so erhalten wir

$$\text{III.}\quad -18a^2 + 14ab + 50b^2.$$

Uebungsbeispiele.

1) $5a + 3(a+b) - 5(4a - 2b) + 12a = +13b$
2) $2b - 3(2a+b) - 6(5b - a) + 18b = -13b$
3) $8a - 7c - 4(a + 2b - 3c) + 2(3a - 4c) = 10a - 8b - 3c$
4) $4a^2 - 2a(3a+b) - 3b^2 + 5b(2a - 3b) = -2a^2 + 8ab - 18b^2$
5) $8bc - 3c^2 - 3c(2b - c + 4d) = 2bc - 12cd$
6) $3ab - 5a(b + 4a) - 2a^2 + 3b(a - 2b) = -22a^2 + ab - 6b^2$
7) $5b^2 + 2a(b - c) - 3b(a - b + 4c) = -ab - 2ac + 8b^2 - 12bc$
8) $a(b - 2c) + 3c^2 - 4b^2 - 2c(3b - 4a + c) = ab + 6ac - 4b^2 - 6bc + c^2$
9) $-5a(a - 2b) + 3a^2 + 8b(3b - a) - 7b^2 = -2a^2 + 2ab + 17b^2$
10) $5x^2 - 2x^3 - 3(8 - 2x + x^2) + 2x(5x - 6x^2) = -24 + 6x + 12x^2 - 14x^3$
11) $3x(2 - 7x) + 9x^2 - 4x^2(2 + 3x - x^2) = 6x - 20x^2 - 12x^3 + 4x^4$
12) $7x^4 - 3x^2(5x - 2x^2) + 3x(2x^2 - x^3) = -9x^3 + 10x^4$
13) $9a^2 - 22ax + 3a(4x - 2a) - 2x(a - x) - 5a(2a - 6x) + 6a^2 = -a^2 + 18ax + 2x^2$
14) $9a^2 - 2ab + (3a + b) . (5a - 2b) = 24a^2 - 3ab - 2b^2$
15) $5ab - (7a - b) . (3a - 4b) + 9b^2 = -21a^2 + 36ab + 5b^2$
16) $3a . (5a^2 - 2ab + b^2) - (2a^2 + 5ab) . (4a - 2b) - 3ab^2 = 7a^3 - 22a^2b + 10ab^2$
17) $-(2a - b) . (a + b) + 3a^2 - 5ab + 7a(3a + 2b - 4c) = 22a^2 + 8ab - 28ac + b^2$
18) $8x^2 + 3x . (2 - x) . (5 + x) - 4x - 6x . (5 - 2x + 3x^2) = -4x + 11x^2 - 21x^3$
19) $a^2 - 3ax - 5a(2a - x) + 3x^2 + (2a - x) . (a - 3x) = -7a^2 - 5ax + 6x^2$
20) $(2 + x) . (3 - x) + 4x^2 - (3 - x) . (4 - x) . (1 + 2x) + 2x^3 = -6 - 16x + 16x^2$
21) $2ab - (a - b)^2 + (a + b)^2 = 6ab$
22) $x^3 + (2 - x)^2 - (1 - x)^3 + 5x^2 - 3x . (2 + 5x - x^2) = 3 - 7x - 12x^2 + 5x^3$
23) $-(3x + 2)^2 + 4x^2 + 7x . (8 - x) - (2 - 5x)^2 = -8 + 64x - 37x^2$
24) $6a^3 + 8a^2x - (a + x) . (5a^2 + 4ax - x^2) + a^2 . (x - a) - x^3 + 3ax^2 = 0$
25) $(-a + 2b) . (3b + c) - 7a . (3c - 5b) + 4ac - 2bc = 32ab - 18ac + 6b^2$.

Da die Anfänger gerade bei der Auflösung der Klammern subtractiver Glieder so häufig Fehler begehen, so ist diesen Uebungen besondere Sorgfalt und Aufmerksamkeit zu widmen.

§. 109. Zusatz.

So wie wir uns im Vorhergehenden mit dem Auflösen der Klammern beschäftigt haben, so kann auch die umgekehrte Aufgabe gestellt werden, mehrere Glieder einer algebraischen Summe, welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, in ein Glied zusammenzuziehen, nach der Regel: Producte, welche einen gleichen Factor haben, werden addirt (oder subtrahirt), wenn man die anderen Factoren addirt (oder subtrahirt) und den gleichen Factor unverändert stehen läßt, so ist z. B.

$$ab + ac = a . (b + c)$$
$$ab - ac = a . (b - c)$$ u. dgl. m.

Uebungsbeispiele.

1) $5bc + 3bd = b\,.\,(5c + 3d)$
2) $8ax - 8bx = 8x\,.\,(a - b)$
3) $3ab + 4bc - 8bd = b\,.\,(3a + 4c - 8d)$
4) $6ac - 9ad - 12af = 3a\,.\,(2c - 3d - 4f)$
5) $15ab^2 - 20b^2c = 5b^2\,.\,(3a - 4c)$
6) $7a^4 + 5a^3b + 4a^2c^2 = a^2\,.\,(7a^2 + 5ab + 4c^2)$
7) $9a^2b - 5ab^2 + 2abc = ab\,.\,(9a - 5b + 2c)$
8) $4ab^2c + 6bc^2d = 2bc\,.\,(2ab + 3cd)$.

In der folgenden Aufgabe

9) $2ac + 6ad - bc - 3bd$

ziehen wir die beiden ersten und die beiden letzten Glieder zusammen; dann erhalten wir

$$2a\,(c + 3d) - b\,(c + 3d);$$

und da die beiden Glieder dieses Ausdrucks den Factor $c + 3d$ gemeinschaftlich haben, so können wir nochmals zusammenziehen und erhalten dann

$$(2a - b)\,(c + 3d).$$

In ähnlicher Art sind die folgenden Aufgaben zu behandeln.

10) $3ac + 6ad + 5bc + 10bd = (3a + 5b)\,(c + 2d)$
11) $24ac - 8ad + 3bc - bd = (8a + b)\,(3c - d)$
12) $10acx + 2adx - 15bc - 3bd = (2ax - 3b)\,(5c + d)$
13) $24ac - 18ad - 20bc + 15bd = (6a - 5b)\,(4c - 3d)$
14) $ab + acx - b^2x - bcx = (a - bx)\,(b + cx)$
15) $6a^2x - 4abx^2 + 9ac - 6bcx = (3a - 2bx)\,(2ax + 3c)$
16) $6a^2b^2 - 2a^3cx - 3b^3cx + abc^2x^2 = (2a^2 - bcx)\,(3b^2 - acx)$

Für Aufgaben wie folgende

$$2a^2 - 7ab + 6b^2 = (a - 2b)\,(2a - 3b)$$

kann die Auflösung zwar auch wohl auf dem Wege des Rathens, methodisch jedoch nur durch Auflösung einer quadratischen Gleichung gewonnen werden. Vgl. unten §. 194, a.

§. 110. Lehrsatz.

Die Regel für das **Dividiren** additiver und subtractiver Ausdrücke ist die nämliche wie für's Multipliciren: **Gleiche Zeichen geben** (+), **ungleiche** (—). So ist z. B.

1) $\dfrac{+12}{+4} = +3$ 2) $\dfrac{-12}{+4} = -3$

3) $\dfrac{+12}{-4} = -3$ 4) $\dfrac{-12}{-4} = +3$

oder in allgemeinen Zeichen:

1) $\dfrac{+a}{+b} = +\dfrac{a}{b}$ 2) $\dfrac{-a}{+b} = -\dfrac{a}{b}$

3) $\dfrac{+a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$ 4) $\dfrac{-a}{-b} = +\dfrac{a}{b}$.

Beweis zu (4). Denn wenn man $+3$ mit -4 multiplicirt, so erhält man -12 zum Producte. — Eben so können die anderen drei Gleichungen erwiesen werden.

Uebungsbeispiele.

1) $+12a : -9b = -\dfrac{4a}{3b}$
2) $-24bc : -8c = +3b$
3) $-56a^3 : +7a^2 = -8a$
4) $-9ab^2 : +15a^2b = -\dfrac{3b}{5a}$

5) $+\frac{3x^2}{2c} : +5ax = +\frac{3x}{10ac}$

6) $+\frac{2a}{b} : -4a = -\frac{1}{2b}$

7) $-3a^2 : -\frac{6b}{5a} = +\frac{5a^3}{2b}$

8) $+9cd : -\frac{3c}{2f} = -6df$

9) $-\frac{5a^2}{2b} : -10a^4 = +\frac{1}{4a^2b}$

10) $-\frac{9x}{c} : +\frac{3z}{d} = -\frac{3dx}{cz}$

11) $+\frac{24a^2}{25x^2} : -\frac{8a^3}{5x^3} = -\frac{3x}{5a}$

12) $-\frac{7ab}{3c^2} : -3ab = +\frac{7}{9c^2}$.

§. 111. Zusatz.

Aus der Regel des vorhergehenden §. folgt auch noch, daß ein **Bruch ungeändert bleibt, wenn man im Zähler und Nenner die Vorzeichen umkehrt**; so ist z. B.

$$\frac{+20}{+5} = \frac{-20}{-5} = +4 \text{ und } \frac{+20}{-5} = \frac{-20}{+5} = -4.$$

§. 112. Zusatz.

Vermöge §. 44 und 110 wird eine algebraische Summe durch einen additiven oder subtractiven Ausdruck dividirt, wenn man jedes Glied dividirt und bei gleichen Zeichen (+), bei ungleichen (—) vorschreibt.

Uebungsbeispiele.

1) $(8a + 5b - 12c) : -9a = -\frac{8}{9} - \frac{5b}{9a} + \frac{4c}{3a}$

2) $\left(3d - \frac{5e}{2f} - 9ef\right) : +3e = \frac{d}{e} - \frac{5}{6f} - 3f$

3) $\left(-5a + \frac{3a}{2x} - \frac{6x}{5a}\right) : -3ax = \frac{5}{3x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{5a^2}$

4) $(8abc^3 - 9a^3c^2) : +12a^2c^3 = \frac{2b}{3a} - \frac{3a}{4c}$

5) $\left(8a - 3b + \frac{5c}{d} + \frac{3e}{10a}\right) : -\frac{4a}{5b} = -10b + \frac{15b^2}{4a} - \frac{25bc}{4ad} - \frac{3be}{8a^2}$

6) $\left(\frac{3x^2}{4a^2} - \frac{5xy}{6ab} - \frac{2y^2}{3b^2}\right) : -\frac{10xy}{3ab} = -\frac{9bx}{40ay} + \frac{1}{4} + \frac{ay}{5bx}$.

§. 113. Zusatz.

Während wir in den vorhergehenden Aufgaben einen Quotienten, dessen Dividendus eine algebraische Summe ist, in eine algebraische Summe verwandelt haben, kann auch umgekehrt die Aufgabe gestellt werden, eine algebraische Summe, welche zu Gliedern Quotienten hat, in einen Quotienten zu verwandeln.

Zur Uebung können zunächst folgende Beispiele dienen, welche nach demselben Verfahren zu behandeln sind, welches wir bereits oben (§. 82) in Betreff der mehrgliedrigen Ausdrücke kennen gelernt haben.

I.

1) $\frac{5a}{4} - \frac{3b}{5} - 2d = \frac{25a - 12b - 40d}{20}$

2) $-\frac{2a}{3b} + \frac{5c}{4d} - f + \frac{4g}{9h} = \frac{-24adh + 45bch - 36bdfh + 16bdg}{36bdh}$

3) $2a - \frac{8b}{3c^2} - \frac{5d}{9cg} = \frac{18ac^2g - 24bg - 5cd}{9c^2g}$

4) $\frac{5x}{4a^2} + \frac{3z}{5ab} - 8 + \frac{y}{12b^2} = \frac{75b^2x + 36abz - 480a^2b^2 + 5a^2y}{60a^2b^2}$

5) $-3a + \frac{2}{5a} - \frac{7}{8a^2} + \frac{9}{16a^3} = \frac{-240a^4 + 32a^2 - 70a + 45}{80a^3}$

6) $\frac{6a}{7b^2} - \frac{3b}{2a} - \frac{4a}{3b} = \frac{36a^2 - 63b^3 - 56a^2b}{42ab^2}$.

II.

Eine größere Aufmerksamkeit erfordert die Umformung solcher algebraischen Summen, welche zu Gliedern Brüche haben, deren Zähler algebraische Summen sind. Es sei z. B. gegeben

7) $\frac{3a}{2b} - \frac{5a - b}{6a} + \frac{3b - 2a}{4b} + 6.$

Bringen wir hier zunächst nach demselben Verfahren, wie im vorhergehenden §., die Brüche auf den gemeinschaftlichen Nenner 12ab, so erhalten wir

$$\frac{18a^2 - 2b\ .\ (5a - b) + 3a\ .\ (3b - 2a) + 72ab}{12ab}.$$

Lösen wir dann nach Anleitung des §. 108 die Klammern auf, so erhalten wir weiter

$$\frac{18a^2 - 10ab + 2b^2 + 9ab - 6a^2 + 72ab}{12ab}$$

und wenn wir die gleichnamigen Glieder zusammenziehen,

$$\frac{12a^2 + 71ab + 2b^2}{12ab}.$$

In ähnlicher Art sind die folgenden **Beispiele** zu behandeln:

8) $5a - \frac{3b + 2a}{8} + \frac{5b}{6} + \frac{a - b}{2} = \frac{126a - b}{24}$

9) $\frac{x + y}{2} - \frac{3x - z}{5} + \frac{y}{3} - \frac{7y + 4z}{10} = \frac{-3x + 4y - 6z}{30}$

10) $2a + \frac{3b - c}{4} - \frac{7a + 5b - 3c}{10} = \frac{26a + 5b + c}{20}$

11) $-\frac{a + 3b}{6} + \frac{2b}{9} + \frac{3a - 5b}{3} - \frac{a}{2} = \frac{6a - 35b}{18}$

12) $\frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} = a$

13) $\frac{a + b}{2} - \frac{a - b}{2} = b$

14) $2c + \frac{3d - e}{4} - \frac{5c + 3d + 7e}{8} = \frac{11c + 3d - 9e}{8}$

15) $\frac{3u - v + w}{7} - \frac{u - v}{14} + \frac{w}{2} = \frac{5u - v + 9w}{14}$

16) $-\frac{2a}{3b} + \frac{5b - a}{4b} - \frac{3a + 2b}{2a} = \frac{-11a^2 - 3ab - 12b^2}{12ab}$

17) $3 - \frac{5c}{6d} + \frac{2c - d}{8c} = \frac{-20c^2 + 78cd - 3d^2}{24cd}$

18) $\frac{2a^2 - b^2}{3a^2} - \frac{5a}{2b} - \frac{3a^2 + 4ab - 7b^2}{9ab} = \frac{-51a^3 + 4a^2b + 14ab^2 - 6b^3}{18a^2b}$

19) $\frac{2a - 3b + 5}{4ab} + \frac{2 - 3a}{5a} - \frac{7 + 3a + b}{3b} = \frac{75 - 110a - 60a^2 - 56ab - 21b}{60ab}.$

III.

Endlich haben wir auch noch den Fall zu behandeln, wenn unter den Gliedern einer algebraischen Summe solche Brüche vorkommen, deren Nenner algebraische Summen sind. Es sei z. B. gegeben

20) $\frac{5a}{2a - b} - \frac{3a - 4b}{5a + 2b} - \frac{2a}{3b}.$

Da hier kein Nenner in dem andern aufgeht, auch keiner mit dem andern einen gemeinschaftlichen Factor enthält, so ist der Generalnenner gleich dem Producte aller drei Nenner, also gleich

$$3b \,.\, (2a - b) \,.\, (5a + 2b).$$

Bringen wir nun sämmtliche Brüche der gegebenen Summe auf diesen Generalnenner, so erhalten wir

$$\frac{15ab \,.\, (5a + 2b) - 3b \,.\, (2a - b) \,.\, (3a - 4b) - 2a \,.\, (2a - b) \,.\, (5a + 2b)}{3b \,.\, (2a - b) \,.\, (5a + 2b)}$$

lösen wir hierauf nach §. 108 die Klammer auf, so erhalten wir weiter

$$\frac{75a^2b + 30ab^2 - 18a^2b + 33ab^2 - 12b^3 - 20a^3 + 2a^2b + 4ab^2}{3b \,.\, (2a - b) \,.\, (5a + 2b)}$$

und wenn wir die gleichnamigen Glieder zusammenziehen,

$$\frac{-20a^3 + 59a^2b + 67ab^2 - 12b^3}{3b \,.\, (2a - b) \,.\, (5a + 2b)}.$$

In dem vorhergehenden Beispiele hat man nur im Zähler die Klammern aufgelöst, dagegen dieselben im Nenner unverändert beibehalten, weil nach dem Auflösen der Klammern im Zähler sich mehrere Glieder in eins zusammenziehen ließen, was dagegen im Nenner in der Regel keine Anwendung findet.

Zur weiteren **Uebung** können folgende **Beispiele** dienen:

21) $\frac{3a + b}{5a - 2b} - \frac{4a - b}{a + 3b} = \frac{-17a^2 + 23ab + b^2}{(5a - 2b) \,.\, (a + 3b)}$

22) $\frac{3x}{2a} + 1 + \frac{5x - a}{2a + x} = \frac{2a^2 + 18ax + 3x^2}{2a(2a + x)}$

23) $\frac{6ab}{2a - b} - \frac{2a^2 + 3b^2}{3b} - 2b + \frac{5a^2}{b} = \frac{26a^3 - 13a^2b + 9b^3}{3b \,.\, (2a - b)}$

24) $\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} = \frac{2}{(1 + x) \,.\, (1 - x)} = \frac{2}{1 - x^2}$

25) $\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 - x} = \frac{-2x}{1 - x^2}$

26) $\frac{a + z}{a - z} - \frac{5a^2}{12z^2} - \frac{a - z}{a + z} = \frac{-5a^4 + 5a^2z^2 + 48az^3}{12z^2(a^2 - z^2)}$

27) $\frac{3a}{(a + b)^2} - \frac{2}{a + b} = \frac{a - 2b}{(a + b)^2}$

28) $\frac{2a^2b}{(a - b)^3} - \frac{b^2}{(a - b)^2} + \frac{a}{a - b} = \frac{a^3 + b^3}{(a - b)^3}$

29) $\frac{1 - x}{1 + x} - \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = \frac{-2x}{1 - x^2}$

30) $\frac{2a^2}{a^2 - b^2} + \frac{3a}{a - b} + \frac{2a - b}{a} = \frac{7a^3 + 2a^2b - 2ab^2 + b^3}{a(a^2 - b^2)}$

31) $\frac{5ax}{4a^2 - x^2} + \frac{3x^2}{2ab + bx} = \frac{5abx + 6ax^2 - 3x^3}{4a^2b - bx^2}$ *)

32) $\frac{4a - x}{(a + x)^2} - \frac{2a + 6x}{a^2 - x^2} = \frac{2a^2 - 13ax - 5x^2}{(a - x) \cdot (a + x)^2}$

33) $\frac{2}{1 - x} + \frac{3 - x}{2x^2} - \frac{1 + 2x}{x - x^3} = \frac{3 - 3x - 3x^2 + 5x^3}{2x^2(1 - x^2)}$.

*§. 114. Zusatz.

Zuweilen kommt es auch vor, daß zwei algebraische Summen durch einander dividirt werden sollen. Die Rechnung geht jedoch nur in den seltensten Fällen auf und hat die größte Aehnlichkeit mit der Division mehrzifferiger Zahlen, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen. Vor der Ausrechnung müssen die Glieder des Divisors und Dividendus nach demselben Gesetze geordnet werden.

Erstes Beispiel.

$$
\begin{array}{l}
3 + 4x \mid 6 + 17x - 3x^2 - 20x^3 \mid 2 + 3x - 5x^2 \\
\qquad\quad 6 + 8x \\
\hline
\qquad\quad\quad + 9x - 3x^2 \\
\qquad\quad\quad + 9x + 12x^2 \\
\hline
\qquad\qquad\quad - 15x^2 - 20x^3 \\
\qquad\qquad\quad - 15x^2 - 20x^3. \\
\hline
\end{array}
$$

Hier ist zunächst mit dem ersten Gliede 3 in das erste Glied 6 des Dividendus dividirt, hierauf der erhaltene Quotient mit dem Divisor $3 + 4x$ multiplicirt und das entstandene Product $6 + 8x$ vom Dividendus subtrahirt. Dann ist zum Reste $9x$ das folgende Glied des Dividendus $-3x^2$ heruntergezogen, mit dem ersten Gliede 3 des Divisors in das erste Glied $9x$ des Restes dividirt u. s. f., bis die Rechnung aufging. Die Rechnung geschieht also gerade so, wie das Dividiren mehrzifferiger Zahlen, nur daß das algebraische Subtrahiren hier, wie in allen anderen Fällen, nach der Regel auszuführen ist: Subtrahiren heißt mit umgekehrtem Zeichen addiren.

Zweites Beispiel.

$$
\begin{array}{l}
4a^2 - 9ax - 2x^2 \mid 12a^4 + 9a^3x - 95a^2x^2 + 4x^4 \mid 3a^2 + 9ax - 2x^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 12a^4 - 27a^3x - 6a^2x^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad + 36a^3x - 89a^2x^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 36a^3x - 81a^2x^2 - 18ax^3 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 8a^2x^2 + 18ax^3 + 4x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 8a^2x^2 + 18ax^3 + 4x^4. \\
\hline
\end{array}
$$

Da hier im Dividendus das Glied mit dem Factor ax^3 fehlt, so hat man zu dem ersten Reste $36a^3x - 89a^2x^2$ kein passendes Glied aus dem Dividendus herunter ziehen können; denn das letzte $4x^4$ gehört offenbar nicht hierher, sondern zur Ergänzung des letzten Restes.

Uebungsbeispiele.

1) $(15 + 2x - 8x^2) : (3 - 2x) = 5 + 4x$

2) $(12a^2 - 44ax + 40x^2) : (3a - 5x) = 4a - 8x$

3) $(4a^2 + 18ax - 10x^2) : (a + 5x) = 4a - 2x$

---

*) Hier ist vor allen Dingen im zweiten Gliede der Nenner $2ab + bx = b(2a + x)$ zu setzen.

4) $(8+10x-27x^2+6x^3):(4-x)=2+3x-6x^2$

5) $(2a^3+2a^2x-8ax^2-8x^3):(2a+4x)=a^2-ax-2x^2$

6) $(25+x^2+2x^3):(5+2x)=5-2x+x^2$

7) $(16a^3-36a^2x+27x^3):(2a-3x)=8a^2-6ax-9x^2$

8) $(12+26x+9x^2+31x^3-63x^4):(3+5x-7x^2)=4+2x+9x^2$

9) $(56a^4-21a^3x-41a^2x^2+19ax^3-2x^4):(8a^2+5ax-2x^2)=7a^2-7ax+x^2$.

10) $\frac{a^2-x^2}{a-x}=a+x$ 11) $\frac{a^3-x^3}{a-x}=a^2+ax+x^2$

12) $\frac{a^4-x^4}{a-x}=a^3+a^2x+ax^2+x^3$

13) $\frac{a^n-x^n}{a-x}=a^{n-1}+a^{n-2}x+a^{n-3}x^2\ldots\ldots+ax^{n-2}+x^{n-1}$ *).

14) $\left(2x^3-\frac{37}{10}x^2+\frac{29}{6}x-2\right):(5x-3)=\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$

15) $\left(2x^3+\frac{x^2}{3}-\frac{8}{3}x+2\right):\left(\frac{2}{3}x+1\right)=3x^2-4x+2$

16) $\left(\frac{5}{4}x^3-\frac{43}{24}x^2+\frac{21}{10}x-\frac{4}{5}\right):\left(\frac{3}{2}x-\frac{4}{5}\right)=\frac{5}{6}x^2-\frac{3}{4}x+1$

17) $\left(\frac{4a^3}{b^3}+\frac{61a^2}{6b^2}+\frac{8a}{b}+2\right):\left(\frac{6a}{b}+4\right)=\frac{2a^2}{3b^2}+\frac{5a}{4b}+\frac{1}{2}$

18) $\left(\frac{8a}{5x}+\frac{2b}{y}-\frac{71b^2x}{40ay^2}-\frac{3b^3x^2}{2a^2y^3}\right):\left(\frac{6x}{5a}+\frac{3bx^2}{4a^2y}\right)=\frac{4a^2}{3x^2}+\frac{5ab}{6xy}-\frac{2b^2}{y^2}$.

Auch die in §. 105 enthaltenen Aufgaben der Multiplication können als Divisionsaufgaben benutzt werden, indem das Product, durch den einen Factor dividirt, den andern zum Quotienten geben muß.

Das Dividiren algebraischer Summen durch einander kann dazu dienen, um zu untersuchen, ob zwei algebraische Summen einen Factor gemeinschaftlich haben, durch welchen sich dieselben ohne Rest dividiren lassen. Das Vorlesen und die Gründe für dasselbe stimmen wesentlich damit überein, wie man den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier ganzen Zahlen findet. (Vergl. unten §. 289).

Sind z. B. die beiden Summen

$$8x^3-26x^2+31x-15$$

und

$$10x^2-3x-18$$

gegeben, welche nach den Potenzen von x geordnet sind, so dividiren wir dieselben in einander, indem wir diejenige, in welcher x in der höchsten Potenz vorkommt, als Dividendus und die andere als Divisor annehmen, wie die folgende Rechnung darstellt.

$$10x^2-3x-18 \,\Big|\, 8x^3-26x^2+31x-15 \,\Big|\, \frac{4}{5}x-\frac{59}{25}$$

$$8x^3-\frac{12}{5}x^2-\frac{72}{5}x$$

$$-\frac{118}{5}x^2+\frac{227}{5}x+15$$

$$-\frac{118}{5}x^2+\frac{177}{25}x+\frac{1062}{25}$$

$$+\frac{958}{25}x-\frac{1437}{25}.$$

*) Diese Gleichung, von welcher die Gleichungen (10), (11) und (12) spezielle Fälle sind, spricht einen wichtigen Lehrsatz aus. Vergl. unten §. 248.

Da bei dieser Division ein Rest geblieben ist, so untersuchen wir weiter, ob dieser Rest mit dem Divisor einen gemeinschaftlichen Factor hat. Der Rest ist aber gleich dem Producte

$$\frac{479}{25} \cdot (2x - 3).$$

Der erste Factor $\frac{479}{25}$ kann offenbar nicht als ein Factor des Divisors $10x^2 - 3x - 18$ angesehen werden; wir dividiren daher mit dem andern Factor $2x - 3$ in diesen Divisor.

$$\begin{array}{r|l|l} 2x - 3 & 10x^2 - 3x - 18 & 5x - 6 \\ & 10x^2 - 15x & \\ \hline & \quad + 12x - 18 & \\ & \quad + 12x - 18 & \\ \hline \end{array}$$

Da dieser Divisor keinen Rest läßt, so ist der Divisor $2x - 3$ ein gemeinschaftlicher Factor der beiden gegebenen algebraischen Summen; und in der That ist

$$8x^3 - 26x^2 + 31x - 15 = (2x - 3)(4x^2 - 7x + 5)$$

und

$$10x^2 - 3x - 18 = (2x - 3)(5x - 6).$$

Wir fügen keine weiteren Beispiele zur Uebung hinzu, da man von diesem Verfahren nur in äußerst seltenen Fällen Gebrauch macht.

Anhang.

Zusammenstellung einiger Formeln.

Bei der algebraischen Multiplication können folgende Formeln nützliche Anwendung finden:

I. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

II. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

III. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

IV. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

V. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

VI. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

VII. $(a + b + c + d)^2 = \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac \\ + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \end{array} \right.$

u. s. w.

Die Gleichungen (III) und (V) sind eigentlich schon in (II) und (IV) enthalten, indem $a - b = a + (-b)$ ist, die Gleichungen (I), (VI) und (VII) aber lassen folgenden Ausdruck in Worten zu:

Das Quadrat eines mehrgliedrigen Ausdrucks ist gleich der Summe aus den Quadraten der einzelnen Glieder und den doppelten Producten von je zwei Gliedern.

Wenn nun z. B. die Aufgabe

$$(7a + 3b) \cdot (7a - 3b)$$

nach Formel (I) gerechnet werden soll, so ist dies Verfahren folgendes:

$$(7a + 3b) \cdot (7a - 3b) = (7a)^2 - (3b)^2 = 49a^2 - 9b^2.$$

Ferner für die Aufgabe $(2a - 3b)^3$

ergibt sich nach Formel (V) folgende Rechnung

$$(2a)^3 - 3(2a)^2 \cdot 3b + 3(2a) \cdot (3b)^2 - (3b)^3$$
$$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$$

Man wird übrigens leicht von selbst finden, daß man beim praktischen Ausrechnen noch weniger zu schreiben nöthig hat, als hier um größerer Deutlichkeit willen geschehen ist.

Uebungsbeispiele.

1) $(9ax + 8bz)(9ax - 8bz) = 81a^2x^2 - 64b^2z^2$

2) $\left(\frac{2x}{3a} + \frac{5z}{4b}\right)\left(\frac{2x}{3a} - \frac{5z}{4b}\right) = \frac{4x^2}{9a^2} - \frac{25z^2}{16b^2}$

3) $(4a^3 + 3b^2c)(4a^3 - 3b^2c) = 16a^6 - 9b^4c^2$

4) $(4a + 5b)^2 = 16a^2 + 40ab + 25b^2$

5) $(3a - 7b)^2 = 9a^2 - 42ab + 49b^2$

6) $(2ax - 3x^2)^2 = 4a^2x^2 - 12ax^3 + 9x^4$

7) $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{5b}{4c}\right)^2 = \frac{4a^2}{9b^2} + \frac{3a}{5c} + \frac{25b^2}{16c^2}$

8) $\left(\frac{4x^2}{5a} - \frac{5x^3}{8a^2}\right)^2 = \frac{16x^4}{25a^2} - \frac{x^5}{a^3} + \frac{25x^6}{64a^4}$

9) $\left(\frac{6ax}{7b^2} + \frac{3bx^2}{8a^3}\right)^2 = \frac{36a^2x^2}{49b^4} + \frac{9b^2x^4}{64a^6}$

10) $(5a + 2b + c)^2 = 25a^2 + 9b^2 + c^2 + 20ab + 10ac + 4bc$

11) $(a - 3b + 4c)^2 = a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 6ab + 8ac - 24ac$

12) $(7a - 9b - 8c)^2 = 49a^2 + 81b^2 + 64c^2 - 126ab - 112ac + 144bc$

13) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b - \frac{3}{4}c\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{4}{9}b^2 + \frac{9}{16}c^2 + \frac{2}{3}ab - \frac{3}{4}ac - bc$

14) $(a + b + c)(a + b - c) = a^2 + 2ab + b^2 - e^2$

15) $(2a + 3b + 4c)(2a - 3b - 4c) = 4a^2 - 9b^2 - 24bc - 16c^2$

16) $(a + 6b - 5c)(a - 6b + 5c) = a^2 - 36b^2 + 60bc - 25c^2$

17) $(5a + 4b)^3 = 125a^2 + 300a^2b + 240ab^2 + 64b^3$

18) $(2a^2 + 3x^2)^3 = 8a^6 + 36a^4x^2 + 54a^2x^4 + 27x^6$

19) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{27}x^3$

20) $(ax^2 - bx^3)^3 = a^3x^6 - 3a^2bx^7 + 3ab^2x^8 - b^3x^9$

21) $\left(\frac{2x}{a} - \frac{a^2}{3x^2}\right)^3 = \frac{8x^3}{a^3} - 4 + \frac{2a^3}{3x^3} - \frac{a^6}{27x^6}$

E. Von den positiven und negativen Zahlen.

§. 115. Erklärung.

Ein Quotient, dessen Divisor und Dividendus eigentliche Zahlen sind, wie z. B. $\frac{5}{8}$, $\frac{12}{4}$ heißt ein **Bruch** im eigentlichen oder engeren Sinne oder auch eine gebrochene Zahl. Ein Bruch heißt **ächt**, wenn sein Zähler kleiner ist als der Nenner, **unächt**, wenn der Zähler eben so groß oder größer ist als der Nenner. Ein Bruch kann einer eigentlichen Zahl gleich sein (z. B. $\frac{12}{4} = 3$), oder dies findet nicht nicht statt $\left(\text{z. B. } \frac{5}{8}, \frac{7}{4}\right)$. Dergleichen Brüche $\left(\text{wie } \frac{5}{8}, \frac{7}{4}\right)$, welche keiner eigentlichen Zahl gleich sind, nennt man vorzugsweise **gebrochene Zahlen**; die eigentlichen Zahlen (1, 2, 3, 4, 5 . . .) werden zum Unterschiede von den gebrochenen Zahlen **ganze Zahlen** genannt.

Die Regeln über die vier Species der Brüche sind in den §§. 40 bis 63 enthalten.

§. 116. Erklärung.

Ein additiver Ausdruck, welcher zum Gliede eine ganze oder gebrochene Zahl hat, wird eine **positive Zahl** genannt (z. B. $+ 8$, $+ \frac{3}{5}$ u. dgl.); und ein subtractiver Ausdruck, dessen Glied einer ganzen oder gebrochenen Zahl gleich ist, heißt eine **negative Zahl**, z. B. ($- 5$, $- \frac{7}{3}$ u. dgl.). Ganze und gebrochene Zahlen, (welche kein Vorzeichen haben), nennt man auch **absolute Zahlen** (z. B. 4, $\frac{5}{6}$ u. dgl.)

§. 117. Zusatz.

1) Die Regeln für die vier Species der positiven und negativen Zahlen ergeben sich aus den oben (§§. 84 bis 110) über additive und subtractive Zahlen erwiesenen Sätzen.

2) Die positive Zahl ist nur ein specieller Fall des additiven Ausdrucks und eben so die negative Zahl ein besonderer Fall des subtractiven Ausdrucks. — So ist z. B. der additive Ausdruck $+ (5 - 7)$ keineswegs einer positiven Zahl, sondern der negativen Zahl $- 2$ gleich; eben so ist der subtractive Ausdruck $- (3 - 8)$ nicht einer negativen Zahl, sondern der positiven Zahl $+ 5$ gleich.

3) Eine positive Zahl, z. B. $+ 7$, ist von der absoluten Zahl 7 nur in der Form verschieden; denn nach §. 85 ist $+ 7 = 0 + 7 = 7$.

§. 118. Lehrsatz.

Jeder durch allgemeine Anwendung der 4 Species aus wirklichen Zahlen beliebig zusammengesetzte Ausdruck ist entweder einer positiven oder einer negativen Zahl oder der Null gleich, vorausgesetzt jedoch, daß an keiner Stelle durch Null dividirt worden ist.

Bew. Die Summe und das Product zweier (absoluten) ganzen Zahlen ist allemal wieder eine ganze Zahl; der Quotient zweier ganzen Zahlen kann eine ganze Zahl oder eine gebrochene Zahl sein. Werden ganze oder gebrochene Zahlen addirt, multiplicirt oder dividirt, so erhält man immer wieder ganze oder gebrochene Zahlen; dagegen kann die Differenz zweier ganzen oder gebrochenen Zahlen einer positiven, einer negativen Zahl oder der Null gleich sein; so ist z. B.

$$8 - 5 = + 3,\quad 8 - 8 = 0,\quad 8 - 12 = - 4,$$
$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = + \frac{5}{12},\quad \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0,\quad \frac{2}{3} - 4 = - \frac{10}{3}.$$

Durch das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren positiver und negativer Zahlen und der Null erhält man, so lange nicht durch Null dividirt ist, allemal wieder positive oder negative Zahlen oder Null, wie aus den Regeln von der Null und den additiven und subtractiven Ausdrücken (§. 84 bis 110) deutlich zu ersehen ist.

§. 119. Erklärung.

Positive und negative Zahlen und Null werden auch zusammen **allgemeine Zahlen** oder **Zahlen im weiteren Sinne** genannt.

§. 120. Erklärung.

Eine Zahl heißt in Uebereinstimmung mit §. 9 größer als eine andere, wenn es eine positive Zahl gibt, welche zu der letzteren addirt die erstere zur Summe gibt.

§. 121. Zusatz.

Aus der vorstehenden Erklärung ergeben sich leicht nachstehende Folgerungen:

1) Jede positive Zahl ist größer als Null. — So ist z. B. $+ 5 > 0$, weil man zu Null die positive Zahl $+ 5$ addiren muß, um $+ 5$ zu erhalten.

2) Jede negative Zahl ist kleiner als Null. — So ist z. B. $- 3 < 0$, oder was dasselbe sagen will, $0 > - 3$, weil die positive Zahl $+ 3$ zu $- 3$ addirt Null zur Summe gibt.

3) Eine positive Zahl ist um so größer, je größer das Glied derselben ist. — So ist z. B. $+ 7 > + 5$, weil die positive Zahl $+ 2$ zu $+ 5$ addirt $+ 7$ gibt.

4) Eine negative Zahl dagegen ist um so kleiner, je größer das Glied derselben ist. — So ist z. B. $- 3 > - 8$, weil man zu $- 8$ noch die positive Zahl $+ 5$ addiren muß, um $- 3$ zu erhalten.

5) Jede positive Zahl ist größer, als jede negative Zahl. — So ist z. B. $+ 4 > - 5$, weil die positive Zahl $+ 9$ zu $- 5$ addirt $+ 4$ zur Summe gibt.

Wir haben uns darauf beschränkt, die Richtigkeit der obigen minder wichtigen Sätze, welche hauptsächlich nur dazu dienen sollen, die Bedeutung der vorhergehenden Erklärung zu veranschaulichen, an bestimmten Beispielen zu zeigen; der geübtere Leser wird leicht im Stande sein, die Beweise in allgemeinen Zeichen zu führen.

§. 122. Lehrsatz.

Ist eine Zahl größer als eine zweite und diese größer als eine dritte, so ist auch die erste Zahl größer als die dritte. — Ist z. B.

$$a > b \text{ und } b > c,$$

so ist auch

$$a > c.$$

Bew. Da $a > b$ vorausgesetzt ist, so muß es eine positive Zahl $+ x$ geben, welche zu b addirt a zur Summe gibt; wir werden daher setzen können

$$1)\ a = b + x.$$

Da ferner $b > c$ vorausgesetzt ist, so muß irgend eine positive Zahl $+ y$ existiren, welche zu c addirt b zur Summe gibt; wir werden also setzen können

$$2)\ b = c + y.$$

Wenn wir nun diesen Werth von b in die Gleichung (1) einsetzen, so verwandelt sich dieselbe in $3)\ a = c + y + x;$

demnach ist

$$a > c;$$

denn es gibt eine positive Zahl $+ (y + x)$, welche zu c addirt a zur Summe gibt.

§. 123. Lehrsatz.

Gleiches zu Größerem addirt gibt Größeres. — Ist z. B.

$$a > b,$$

so ist auch

$$a + c > b + c.$$

Bew. Zufolge der Voraussetzung können wir setzen

$$a = b + x.$$

Addiren wir zu beiden Seiten dieser Gleichung c, so erhalten wir

$$a + c = b + c + x;$$

folglich ist

$$a + c > b + c.$$

§. 124. Zusatz.

Größeres zu Größerem addirt gibt Größeres. — Ist z. B.

$$a > b,$$

und $c > d,$

so ist auch $a + c > b + d.$

Bew. Da $a > b$ vorausgesetzt ist, so ist zufolge des vorhergehenden §., wenn wir beiderseits c addiren, 1) $a + c > b + c$,

und da ferner $c > d$ vorausgesetzt, so ist, wenn wir beiderseits b addiren,

$$2)\ b + c > b + d.$$

Aus (1) und (2) folgt nach §. 122

$$3)\ a + c > b + d.$$

§. 125. Lehrsatz.

Gleiches von Größerem subtrahirt läßt Größeres. — Ist z. B.

$$a > b,$$

so ist auch $a - c > b - c.$

Bew. Da $a > b$ vorausgesetzt ist, so können wir nach §. 120 setzen

$$a = b + x.$$

Addiren wir jetzt auf beiden Seiten $-$ c, so erhalten wir

$$a - c = b - c + x;$$

folglich ist $a - c > b - c.$

§. 126. Lehrsatz.

Größeres von Gleichem subtrahirt läßt Kleineres. — Ist z. B.

$$a > b,$$

so ist $c - a < c - b.$

Bew. Infolge der Voraussetzung setzen wir

$$a = b + x.$$

Subtrahiren wir diese Gleichung von der Gleichung

$$c = c,$$

so erhalten wir $c - a = c - (b + x)$,

oder wenn wir die Klammern auflösen,

$$c - a = c - b - x.$$

Addiren wir nun noch zu beiden Seiten dieser Gleichung $+ x$, so erhalten wir $c - a + x = c - b$;

demnach ist $c - b > c - a$,

weil die positive Zahl $+ x$ zu $c - a$ addirt $c - b$ zur Summe gibt.

§. 127. Zusatz.

Kleineres von Größerem subtrahirt gibt Größeres. — Ist z. B. $a > b$

und $c < d,$

so ist $a - c > b - d.$

Bew. Da $a > b$ vorausgesetzt ist, so ist nach §. 125

$$1)\ a - c > b - c,$$

und da ferner $c < d$ vorausgesetzt ist, so ist nach §. 126

$$2)\ b - c > b - d.$$

Aus (1) und (2) folgt nach §. 122

$$3)\ a - c > b - d.$$

Bemerkung.

Die in den nächstvorhergehenden §§. von Summen und Differenzen erwiesenen Sätze gelten ganz allgemein, sowohl wenn die Buchstaben a, b, c, d beliebige positive, als auch wenn dieselben negative Zahlen oder Null bezeichnen. Dagegen gelten die nächstfolgenden Sätze nur dann ganz gewiß, wenn die zu vergleichenden Ausdrücke positiven Zahlen gleich sind; sie sind nicht mehr unbedingt richtig, wenn man statt dieser Ausdrücke negative Zahlen oder Null setzt. — Um Verwechslungen zu verhüten, wollen wir uns in den nächsten §§. der Buchstaben m, n, p, q bedienen und unter denselben ausschließlich positive Zahlen verstehen.

§. 128. Lehrsatz.

Gleiches mit Größerem multiplicirt gibt Größeres. — Ist z. B.

$$m > n,$$

so ist auch

$$m \,.\, p > n \,.\, p.$$

Bew. Da m > n vorausgesetzt ist, so können wir nach §. 120 setzen

$$m = n + x.$$

Multipliciren wir beide Seiten dieser Gleichung mit p, so erhalten wir

$$m \,.\, p = n \,.\, p + p \,.\, x.$$

Da das Product zweier positiven Zahlen p . x allemal wieder eine absolute Zahl ist, so ist folglich $mp > np$.

Der vorstehende Lehrsatz hört auf richtig zu sein, wenn wir statt p Null oder eine negative Zahl setzen.

So ist z. B. $7 > 5$,

aber $7 \,.\, 0 = 5 \,.\, 0 = 0$

und $7 \,.\, -3 < 5 \,.\, -3$,

d. h. $-21 < -15$.

§. 129. Zusatz.

Größeres mit Größerem multiplicirt gibt Größeres. — Ist z. B.

$$m > n$$

und

$$p > q,$$

so ist auch

$$m \,.\, p > n \,.\, q.$$

Bew. Da m > n vorausgesetzt ist, so ist zufolge des vorhergehenden §.

$$1)\ m \,.\, p > n \,.\, p;$$

und da ferner p > q vorausgesetzt ist, so ist nach demselben §.

$$2)\ n \,.\, p > n \,.\, q.$$

Aus (1) und (2) folgt nach §. 122

$$3)\ m \,.\, p > n \,.\, q.$$

§. 130. Lehrsatz.

Größeres durch Gleiches dividirt gibt Größeres. — Ist z. B.

$$m > n,$$

so ist auch

$$\frac{m}{p} > \frac{n}{p}.$$

Bew. Es sei $m = n + x$.

Dividiren wir beide Seiten dieser Gleichung durch p, so erhalten wir

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{p} + \frac{x}{p};$$

folglich ist

$$\frac{m}{p} > \frac{n}{p},$$

da der Quotient jener positiven Zahlen $\frac{x}{p}$ nothwendig wieder eine positive Zahl ist.

§. 131. Lehrsatz.

Gleiches durch Größeres dividirt gibt Kleineres. — Ist z. B.

$$m > n,$$

so ist

$$\frac{p}{m} < \frac{p}{n}.$$

Bew. Um die beiden Brüche $\frac{p}{m}$ und $\frac{p}{n}$ bequemer vergleichen zu können, bringen wir dieselben auf einen gleichen Nenner m . n. Nach §. 59 ist

$$\frac{p}{m} = \frac{n \cdot p}{m \cdot n} \text{ und } \frac{p}{n} = \frac{m \cdot p}{m \cdot n}.$$

Da nach der Voraussetzung $m > n$

ist, so ist nach §. 128, wenn wir beiderseits mit p multipliciren,

$$m \cdot p > n \cdot p,$$

und folglich nach §. 130, wenn wir beiderseits durch m . n dividiren,

$$\frac{m \cdot p}{m \cdot n} > \frac{n \cdot p}{m \cdot n};$$

also

$$\frac{p}{n} > \frac{p}{m}, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 132. Zusatz.

Größeres durch Kleineres dividirt gibt Größeres. — Ist z. B.

$$m > n,$$

aber

$$p < q,$$

so ist

$$\frac{m}{p} > \frac{n}{q}.$$

Bew. Da $m > n$ vorausgesetzt ist, so ist nach §. 130

$$1) \quad \frac{m}{p} > \frac{n}{p},$$

und da ferner $p < q$ vorausgesetzt ist, so ist nach §. 131

$$2) \quad \frac{n}{p} > \frac{n}{q}.$$

Aus (1) und (2) folgt nach §. 122

$$3) \quad \frac{m}{p} > \frac{n}{q}.$$

§. 133. Zusatz.

Aus §§. 130 und 131 kann man noch nachstehende Folgerungen ziehen:

1) Von zwei Brüchen mit gleichem Nenner ist derjenige der größere, welcher den größeren Zähler hat; und

2) von zwei Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige der größere, welcher den kleineren Nenner hat.

Dritter Abschnitt.

Von den Quadraten und Quadratwurzeln und von den Kuben und Kubikwurzeln.

Bemerkung.

Im Vorhergehenden ist schon an mehreren Stellen gelegentlich von Potenzen die Rede gewesen. Wir wollen nun zunächst von der zweiten Potenz, welche die häufigste Anwendung findet, ausführlich und dann kürzer von der dritten Potenz handeln.

A. Von den Quadraten und Quadratwurzeln.

§. 134. Erklärung.

Unter dem Quadrate einer Zahl versteht man das Product, welches man erhält, wenn man die gegebene Zahl mit sich selbst multiplicirt, und unter der Quadratwurzel aus einer Zahl versteht man diejenige Zahl, deren Quadrat der gegebenen Zahl gleich ist.

Man bezeichnet das Quadrat von

a mit a^2

und die Quadratwurzel aus a mit $\sqrt{a}$.

In dem Ausdrucke $\sqrt{a}$ wird die Zahl a, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, der Radicand genannt.

§. 135. Zusatz.

1) Die Quadrate aller Zahlen, sowohl die der positiven, als die der negativen Zahlen, sind positiv, weil nach §. 103 gleiche Zeichen beim Multipliciren + geben; so ist z. B. $(+5)^2 = (+5) \cdot (+5) = +25$ und $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25$.

2) Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl kann daher allemal zwei Werthe haben; d. h. sie kann sowohl einer positiven als auch einer negativen Zahl gleich sein. So kann z. B. $\sqrt{25}$ eben sowohl $= +5$ als auch $= -5$ sein, weil wir so eben gesehen haben, daß auch $(-5)^2 = +25$ ist.

3) Da nach Nro. 1 eine negative Zahl weder das Quadrat einer positiven noch einer negativen Zahl sein kann, so ist es auch nicht möglich, aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen. Bezeichnet z. B. $-p$ eine negative Zahl, so kann $\sqrt{-p}$ weder einer positiven noch einer negativen Zahl gleich sein. Man nennt einen solchen Ausdruck, welcher weder einer positiven noch einer negativen Zahl noch der Null gleich sein kann, einen imaginären Ausdruck. Jeder Ausdruck dagegen, welcher entweder der Null oder einer positiven oder einer negativen Zahl gleich ist (oder doch gleich gedacht werden kann), wird ein reeller Ausdruck genannt.

In diesem Abschnitte sollen nur reelle Ausdrücke in Betracht gezogen werden.

4) Obschon nach Nro. 2 die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl eigentlich zwei Werthe hat, nämlich sowohl einer positiven als auch einer negativen Zahl gleich sein kann, so wollen wir doch, um Verwechselungen zu

vermeiden, welche leicht aus dieser Zweideutigkeit entspringen könnten, in den folgenden §§. dieses Abschnitts unter jeder Quadratwurzel nur ihren positiven Werth verstehen.

§. 136. Zusatz.

Aus der Erklärung der Quadratwurzel in §. 134 ergibt sich (die wichtigste aller Regeln über Quadratwurzeln): Wenn man eine Quadratwurzel mit sich selbst multiplicirt, so erhält man den Radicanden, in Zeichen: 1) $\sqrt{a} \,.\, \sqrt{a} = a$,
wofür man auch setzen kann $(\sqrt{a})^2 = a$.
Eben so erkennt man leicht die Richtigkeit der folgenden Gleichung

$$2)\quad \sqrt{a^2} = a.$$

§. 137. Lehrsatz.

Das Quadrat eines zweigliederigen Ausdrucks besteht aus drei Theilen, aus dem Quadrate des ersten Gliedes, dem doppelten Producte beider Glieder und dem Quadrate des zweiten Gliedes, in Zeichen: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichung wird erhalten, wenn man $a + b$ mit $a + b$ multiplicirt.

§. 138. Zusatz.

Aus den beiden vorhergehenden §§. folgt, daß aus einem zweigliederigen Ausdrucke niemals die Wurzel gezogen werden kann. Diese Wurzel kann nämlich nicht bloß aus einem Gliede bestehen, da ein solches, ins Quadrat erhoben, wieder nur ein Glied gibt; sie kann auch nicht ein aus zwei Gliedern bestehender Ausdruck sein, da ein solcher, ins Quadrat erhoben, drei Glieder liefert.

Eine sich von selbst verstehende Ausnahme von dieser Regel bildet jedoch ein zweigliederiger Ausdruck, welcher sich in einen eingliederigen zusammenziehen läßt, z. B.

$$3a^2 + 6a^2 = 9a^2.$$

§. 139. Lehrsatz.

Ein Product wird quadrirt, wenn man jeden Factor quadrirt, und aus einem Producte wird die Wurzel gezogen, wenn man sie aus jedem Factor zieht, in Zeichen:

$$1)\quad (a \,.\, b)^2 = a^2 \,.\, b^2 \text{ und } 2)\quad \sqrt{(a^2 \,.\, b^2)} = a \,.\, b.$$

Bew. zu (1). Es ist

$$(a \,.\, b)^2 = a \,.\, b \,.\, a \,.\, b = a \,.\, a \,.\, b \,.\, b = a^2b^2.$$

(2) aber folgt unmittelbar aus (1).

§. 140. Lehrsatz.

Ein Bruch wird quadrirt, wenn man Zähler und Nenner quadrirt, und aus einem Bruche wird die Wurzel gezogen, wenn man sie aus Zähler und Nenner zieht, in Zeichen:

$$1)\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \text{ und } 2)\quad \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}.$$

Bew. Es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \,.\, \frac{a}{b} = \frac{a \,.\, a}{b \,.\, b} = \frac{a^2}{b^2}$,
womit auch die Richtigkeit der Gleichung (2) dargethan ist.

§. 141. Erklärung.

Im Vorhergehenden haben wir nur solche Quadratwurzeln in Betracht gezogen, welche sich wirklich ausziehen lassen. Man ist jedoch keineswegs im Stande, aus allen Zahlen die Wurzel vollständig auszuziehen, vielmehr vermag man in der Mehrzahl der Fälle nur Grenzen anzugeben, zwischen denen die gesuchte Wurzel liegt. Dergleichen Grenzen, welche man einander so sehr nähern kann, als man immer will, nennt man Näherungswerthe, und die gesuchte, nicht vollständig darstellbare Wurzel wird irrational genannt.

Ueberhaupt wird eine jede nur in Gedanken existirende Zahl, welche sich nicht vollständig, sondern nur näherungsweise darstellen läßt, eine Irrationalzahl genannt.

Man behandelt aber die irrationalen Zahlen nach den nämlichen Regeln wie die rationalen.

§. 142, a. Zusatz.

Aus den Regeln der §§. 139 u. 140, a u. b geht leicht die Richtigkeit folgender Formeln hervor:

1) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ und 2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Wenn wir diese Gleichungen rückwärts lesen, so erhalten wir noch folgende Regel: Quadratwurzeln werden mit einander multiplicirt oder dividirt, wenn man ihre Radicanden multiplicirt oder dividirt.

§. 142, b. Zusatz.

Auch folgende Gleichungen sind leicht abzuleiten:

1) $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ 2) $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

3) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$ 4) $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

5) $\sqrt{\frac{a}{b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{b}$ 6) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

Uebungsbeispiele.

1) $\sqrt{(25a^2)} = 5a$ 2) $\sqrt{(7a^2)} = a\sqrt{7}$
3) $\sqrt{(81a)} = 9\sqrt{a}$ 4) $\sqrt{12} = \sqrt{(4 \cdot 3)} = 2\sqrt{3}$
5) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 6) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
7) $5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$ 8) $3\sqrt{54} = 9\sqrt{6}$
9) $4\sqrt{18} + 7\sqrt{32} - 9\sqrt{8} = 22\sqrt{2}$
10) $12\sqrt{48} - 3\sqrt{12} - 6\sqrt{75} = 12\sqrt{3}$
11) $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 12) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
13) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ 14) $\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$
15) $\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$ 16) $\sqrt{\frac{7}{18}} = \frac{1}{6}\sqrt{14}$
17) $(2+\sqrt{3}) \cdot (4-3\sqrt{5}) = 8+4\sqrt{3}-6\sqrt{5}-3\sqrt{15}$
18) $(3+\sqrt{2}) \cdot (5-2\sqrt{2}) = 11-\sqrt{2}$
19) $(5-\sqrt{6}) \cdot (4+\sqrt{6}) = 14+\sqrt{6}$
20) $(8+2\sqrt{5}) \cdot (3-7\sqrt{5}) = -46-50\sqrt{5}$
21) $(4-\sqrt{11}) \cdot (5-2\sqrt{11}) = 42-13\sqrt{11}$

22) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3}+3\sqrt{2}) = 18+7\sqrt{6}$
23) $(5\sqrt{6}-3\sqrt{7}) \cdot (4\sqrt{6}-5\sqrt{7}) = 225-37\sqrt{42}$
24) $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$
25) $(2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3}$
26) $(2+\sqrt{2})^3 = 20+14\sqrt{2}$
27) $(3+\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{5}) = 4$
28) $(6-3\sqrt{2}) \cdot (6+3\sqrt{2}) = 18$
29) $(\sqrt{5}+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{3}) = 2$
30) $(3\sqrt{6}+2\sqrt{7}) \cdot (3\sqrt{6}-2\sqrt{7}) = 26$
31) $(a+\sqrt{b}) \cdot (c+\sqrt{d}) = ac+a\sqrt{d}+c\sqrt{b}+\sqrt{bd}$
32) $(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{c}-\sqrt{d}) = \sqrt{ac}-\sqrt{ad}-\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$
*32) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$
33) $(a+b\sqrt{c}) \cdot (a-d\sqrt{c}) = a^2-bcd+a(b-d)\sqrt{c}$
34) $(a+\sqrt{b}) \cdot (a-\sqrt{b}) = a^2-b$
35) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$
36) $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d}) \cdot (a\sqrt{b}-c\sqrt{d}) = a^2b-c^2d.$

Für geübtere Leser wollen wir noch die folgenden Beispiele hinzufügen.

Wenn man in dem Bruche 37) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$

Zähler und Nenner mit $3+\sqrt{5}$ multiplicirt, so verwandelt sich derselbe in:

$$\frac{2 \cdot (3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5})} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

In ähnlicher Art sind die folgenden Exempel zu behandeln:

38) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1+\sqrt{2}$ 39) $\frac{3}{5+2\sqrt{2}} = \frac{15-6\sqrt{2}}{17}$

40) $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = 2+\sqrt{5}$ 41) $\frac{6+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} = 8+5\sqrt{3}$

42) $\frac{2}{\sqrt{7}+2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{13}$ 43) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

§. 142, c. Zusatz.

Sind a und b positive Zahlen, und ist $a > b$ gegeben, so ist nach §. 129 auch $a \cdot a > b \cdot b$, also $a^2 > b^2$.

Ferner ist, wenn $a > b$ vorausgesetzt ist, auch $\sqrt{a} > \sqrt{b}$; denn wäre $\sqrt{a} \leqq \sqrt{b}$, so müßte nach dem eben Erwiesenen $(\sqrt{a})^2 \leqq (\sqrt{b})^2$, d. h. $a \leqq b$ sein, was gegen die Voraussetzung streitet.

Anm. Ueber die imaginäre Quadratwurzel vergleiche unten §. 188.

Anhang.

Von dem numerischen Ausziehen der Quadratwurzel.

I.

Da jede einzifferige Zahl zwischen 1 und 10, jede zweizifferige Zahl zwischen 10 und 100, jede dreizifferige Zahl zwischen 100 und 1000 u. s. f. liegt, da ferner

$$1^2 = 1$$
$$10^2 = 100$$
$$100^2 = 10000$$
$$1000^2 = 1000000$$

ist, so folgt hieraus:

Das Quadrat einer 1zifferigen Zahl ist eine 1- oder 2zifferige Zahl
" " " 2 " " " " 3 " 4 " "
" " " 3 " " " " 5 " 6 " "
u. s. w. Umgekehrt ist daher
die Wurzel aus einer 1- oder 2zifferigen Zahl eine 1zifferige Zahl
" " " " 3 " 4 " " " 2 " "
" " " " 5 " 6 " " " 3 " "
u. s. w. Eine einzifferige Wurzel, d. h. die Wurzel aus einer ein- oder zweizifferigen Zahl zu finden, lehrt schon das Einmaleins. Um weiter zu zeigen, wie aus einer drei- oder vierzifferigen Zahl die Wurzel, welche zufolge des Vorhergehenden zweizifferig sein muß, gefunden wird, hat man vorher zuzusehen, wie das Quadrat einer zweizifferigen Zahl gebildet wird. — Wenn man in der oben (§. 137) erwiesenen Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

a als den Zehner und **b** als den Einer annimmt, so ergibt sich folgende Regel:

Das Quadrat einer zweizifferigen Zahl besteht aus drei Theilen, aus dem Quadrate des Zehners, dem doppelten Producte des Zehners und Einers und aus dem Quadrate des Einers.

Bilden wir nach dieser Regel z. B. das Quadrat von 74, indem wir **a** = 70, **b** = 4 annehmen, so erhalten wir

$$\begin{array}{rcrcr} a^2 & = & 70^2 & = & 4900 \\ 2ab & = & 2 \cdot 70 \cdot 4 & = & 560 \\ b^2 & = & 4^2 & = & 16 \\ \hline (a+b)^2 & = & 74^2 & = & 5476. \end{array}$$

Aus diesem Beispiele ziehen wir weiter folgende Regeln, welche sich auch leicht allgemein begründen lassen: Das Quadrat des Zehners liefert allemal nur Hunderter, (keine Zehner und keine Einer); das doppelte Product aus dem Zehner und Einer liefert nur Zehner, (keine Einer); nur das Quadrat des Einers liefert auch Einer.

II.

Diese Regeln werden nun bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer drei- oder vierzifferigen Zahl, z. B. aus der Zahl

$$5476$$

in folgender Art angewendet: Da die gegebene Zahl vier Ziffern enthält, so muß ihre Wurzel zwei Ziffern haben. Wir unterscheiden also an derselben den Zehner und den Einer. Um zunächst den Zehner zu finden, berufen wir uns auf die Regel: das Quadrat des Zehners liefert nur Hunderter. Wenn wir daher die beiden letzten Ziffern 76 von den übrigen durch einen Strich trennen,

$$54 \mid 76,$$

so muß das Quadrat des Zehners ganz in den Ziffern vor dem Striche 54 enthalten sein, wonach sich leicht der gesuchte Zehner a = 7 ergibt. Wir erheben nun den Zehner 7 ins Quadrat, subtrahiren das Quadrat von der gegebenen Zahl und ziehen aus sogleich anzuführenden Gründen zu dem Reste 5 auch den Zehner 7 herunter; wir erhalten so

$$\begin{array}{r|l|l} 54 & 76 & 7 = a \\ a^2 = 49 & & \\ \hline 57 & & \end{array}$$

Um nun weiter den noch fehlenden Einer b zu finden, berufen wir uns auf die Regel: das doppelte Product aus dem Zehner und Einer liefert nur Zehner. Es muß daher dieses doppelte Product ganz in 57 enthalten sein. Der Zehner a war = 7, der doppelte Zehner 2a ist also = 14, und da das doppelte Product aus Zehner und Einer 2ab ganz in 57 steckt, so erhalten wir den Einer b, wenn wir mit 2a = 14 in 57

dividiren. Diese Division gibt zum Quotienten $b = 4$ und läßt zum Reste 1. Ziehen wir zu diesem Zehner 1 noch den Einer 6 herab, so ist die entstandene Zahl 16 gleich dem Quadrate des Einers $= b^2 = 4^2 = 16$. Hiernach ist die vollständige Rechnung folgende:

$$\begin{array}{rrr|l}
 & & 54 \mid 76 & 7 = a \\
a^2 = & & 49 & \\
\hline
2a = & 14 \mid & 57 & 4 = b \\
2ab = & & 56 & \\
\hline
 & & 16 & \\
b^2 = & & 16 & 74 = \text{Wurzel.} \\
\hline
\end{array}$$

Zufolge der vorstehenden Rechnung ist:

$$5476 = 4900 + 560 + 16$$
$$= 70^2 + 2 \, . \, 70 \, . \, 4 + 4^2 = 74^2.$$

Wir wollen das nämliche Verfahren noch auf folgendes Beispiel anwenden:

$$\begin{array}{rrr|l}
 & & 7 \mid 25 & 2 = a. \\
a^2 = & & 4 & \\
\hline
2a = & 4 \mid & 32 & 6 = b^{*)} \\
2ab = & & 24 & \\
\hline
 & & 85 & \\
b^2 = & & 36 & 26 = \text{Wurzel.} \\
\hline
 & & 49 &
\end{array}$$

Da hier am Ende dieser Rechnung der Rest 49 geblieben ist, so ist

$$725 = 26^2 + 49.$$

III.

Soll ferner aus einer fünf- oder sechsziffrigen Zahl, z. B. aus

298116

die Quadratwurzel gezogen werden, so verfahren wir im wesentlichen ganz nach derselben Ueberlegung, wie in den vorhergehenden Beispielen. Wir suchen nämlich zunächst den Zehner, (welcher hier zweiziffrig ist), nach der Regel: das Quadrat des Zehners liefert nur Hunderter. Wir schneiden daher die beiden letzten Ziffern 16 von den übrigen durch einen Strich ab und finden den gesuchten Zehner, indem wir aus der Zahl vor dem Striche 2981 nach dem Verfahren, welches wir im Vorhergehenden kennen gelernt haben, die Quadratwurzel ausziehen, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{array}{rrr|l}
 & & 19 \mid 81 \mid 16 & 5 = a \\
a^2 = & & 25 & \\
\hline
2a = & 10 \mid & 48 & 4 = b \\
2ab = & & 40 & \\
\hline
 & & 81 & \\
b^2 = & & 16 & \\
\hline
 & & 65 & 54 = a.
\end{array}$$

Nachdem wir so den Zehner $a = 54$ gefunden haben, berufen wir uns, um den noch fehlenden Einer b zu bestimmen, auf die Regel: das doppelte Product aus dem Zehner und Einer reicht bis zu dem Zehner. Wir ziehen daher zu dem Reste 65 den Zehner 1 herunter; dann muß in der entstandenen Zahl 651 das doppelte Product aus dem Zehner und Einer $2ab = 2 \, . \, 54 \, . \, b = 108 \, . \, b$ enthalten sein. Wenn wir daher mit $2a = 108$ in 651 dividiren, so erhalten wir als Quotienten den gesuchten

*) Wenn man hier $b = 8$ oder 7 annehmen wollte, so würde sich b^2 nicht abziehen lassen.

Einer b = 6, und wenn wir zum Reste 3 noch den Einer 6 aus der gegebenen Zahl herabziehen, so ist $36 = b^2$. Hiernach ist die vollständige Rechnung:

		29 | 81 | 16	5 = a
a^2	=	25	
2a	=	10 | 48	4 = b
2ab	=	40	
		81	
b^2	=	16	54 = a
2a	=	108 | 651	6 = b
2ab	=	648	
		36	
b^2		36	546 = Wurzel *).

IV.

Ganz nach derselben Ueberlegung, welche wir in dem letzten Exempel angewendet haben, verfahren wir auch, wenn aus einer sieben- oder achtzifferigen Zahl die Quadratwurzel ausgezogen werden soll. Wir suchen nämlich zuerst den Zehner der Wurzel, welcher hier dreizifferig ist, indem wir die beiden letzten Ziffern der gegebenen Zahl durch einen Strich von den übrigen abschneiden und aus der fünf- oder sechszifferigen Zahl vor dem Striche nach dem Verfahren, welches wir so eben kennen gelernt haben, die Quadratwurzel ziehen u. s. w. — Es wird jedoch nicht mehr nöthig sein, das Verfahren ausführlich zu erörtern, sondern hinreichen, ein vollständig ausgerechnetes Exempel herzusetzen.

	3 | 87 | 30 | 24	1968
	1	
2	28	
	18	
	107	
	81	
38	263	
	228	
	350	
	36	
392	3142	
	3136	
	64	
	64	

V.

Weiter sieht man nun leicht ein, wie sich die im Vorhergehenden angewendete Ueberlegung auch auf solche Zahlen erweitern läßt, welche 9 oder mehr Ziffern enthalten, ohne

*) Da $2ab + b^2 = (2a + b) \cdot b$ ist, so läßt sich die obige Rechnung auch etwas kürzer so schreiben:

	29 | 81 | 16	5 = a
a^2 =	25	
2a + b =	104 | 481	4 = b
(2a + b) . b =	416	54 = a
2a + b =	1086 | 6516	6 = b
(2a + b) . b =	6516	546 = Wurzel.

daß es hierzu der besonderen Anleitung bedürfen wird. Wir wollen nur noch den Fall, daß in einer Wurzel eine Null vorkommt, durch das folgende Beispiel erläutern.

```
      5 | 79 | 65 | 37 | 76 | 24076
      4
   4 | 17
       16
        19
        16
 480 | 3653
       3360
        2937
          49
 4814 | 28887
        28884
            36
            36
```

VI.

Im Vorhergehenden haben wir hauptsächlich nur solche Zahlen behandelt, aus welchen sich die Wurzel wirklich ausziehen läßt. Dies gilt jedoch bei weitem nur von den wenigsten Zahlen. Die Quadratwurzeln aus den meisten Zahlen sind irrational und können daher nur näherungsweise dargestellt werden. Soll z. B. $\sqrt{27}$ in den drei ersten Decimalstellen näherungsweise gefunden werden, so verwandelt man zunächst 27 in den Decimalbruch

$$27{,}000000 = \frac{27000000}{1000000},$$

indem man an 27 die doppelte Anzahl, also 6 Nullen hängt, und zieht dann vermöge §. 140 die Wurzel sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner auf bekannte Weise. Nun ist näherungsweise $\sqrt{27000000} = 5196$ und genau $\sqrt{1000000} = 1000$, folglich näherungsweise die gesuchte Wurzel

$$\sqrt{\frac{27000000}{1000000}} = \frac{5196}{1000} = 5{,}196.$$

Man pflegt jedoch die sechs Nullen nicht an 27 selbst anzuhängen, sondern nur während der Rechnung den einzelnen Resten beizufügen, wie die folgende Ausrechnung zeigt:

```
       27 | 5,196
       25
  10 | 20
       10
       100
         1
 102 | 990
       918
        720
         81
 1038 | 6390
        6228
         1620
           36
         1584
```

Zufolge der vorstehenden Rechnung ist

$$5196^2 < 27000000,$$

aber $$5197^2 > 27000000,$$

folglich, wenn man beiderseits mit $1000^2 = 1000000$ dividirt,

$$5{,}196^2 < 27,$$

aber $$5{,}197^2 > 27.$$

VII.

Soll ferner aus einem Decimalbruche ein Nährungswerth der Quadratwurzel gefunden werden, so ertheilt man, (wenn es nöthig ist), durch Anhängen von Nullen dem gegebenen Decimalbruche doppelt so viel Decimalstellen, als die gesuchte Wurzel haben soll, und zieht die Wurzel aus Zähler und Nenner des entstandenen Bruches. Auch hier pflegt man die Nullen erst während der Rechnung beizufügen, indem man allemal den ersten Theilungsstrich durch das Komma zieht und nach rechts und links je zwei Ziffern abschneidet. Soll z. B. aus 3,579 die Wurzel bis zur vierten Decimalstelle gezogen werden, so ist die Rechnung folgende:

```
          3, | 57 | 90 | 1,8918
          1
     2 | 25
         16
          97
          64
    36 | 339
         324
          150
           81
   378 | 690
         378
          3120
             1
  3782 | 31190
         30256
           9340
             64
           9276
```

VIII.

Soll endlich aus einem gemeinen Bruche die Wurzel ausgezogen werden, so kann man dieselbe, vermöge §. 140 aus Zähler und Nenner ziehen, wenn diese vollständige Quadrate sind. So ist z. B.

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

Wenn aber die Wurzel aus dem Zähler oder Nenner irrational sein sollte, so verwandelt man den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch und verfährt dann nach der im Vorhergehenden gegebenen Vorschrift. So ist z. B.

$$\frac{5}{11} = 0{,}454545\,..$$

und

$$\sqrt{\frac{5}{11}} = \sqrt{0{,}454545\,..} = 0{,}674\,..$$

Zur Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $\sqrt{576} = 24$
2) $\sqrt{2116} = 46$
3) $\sqrt{4225} = 65$
4) $\sqrt{7569} = 87$
5) $\sqrt{17956} = 134$
6) $\sqrt{99856} = 316$
7) $\sqrt{222784} = 472$
8) $\sqrt{567009} = 753$
9) $\sqrt{651249} = 807$
10) $\sqrt{811801} = 901$
11) $\sqrt{2985984} = 1728$
12) $\sqrt{7529536} = 2744$
13) $\sqrt{24137569} = 4913$
14) $\sqrt{47045881} = 6859$
15) $\sqrt{387420489} = 19683$
16) $\sqrt{4537100164} = 67358$
17) $\sqrt{16777216} = 4096$
18) $\sqrt{32558436} = 5706$
19) $\sqrt{1444380025} = 38005$
20) $\sqrt{8112965184} = 90072$
21) $\sqrt{3} = 1{,}73205\,..$
22) $\sqrt{18} = 4{,}24264\,..$
23) $\sqrt{74} = 8{,}60232\,..$
24) $\sqrt{280} = 16{,}73320\,..$
25) $\sqrt{23{,}5} = 4{,}84767\,..$
26) $\sqrt{3{,}44} = 1{,}85472\,..$
27) $\sqrt{0{,}4} = 0{,}63245\,..$

28) $\sqrt{0{,}07} = 0{,}26457\,..$

29) $\sqrt{0{,}00026} = 0{,}016124\,..$

30) $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707106\,..$

31) $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}81649\,..$

32) $\sqrt{3\frac{3}{4}} = 1{,}93649\,..$

Bei der häufigen Anwendung, welche die folgenden Wurzeln in der rechnenden Geometrie finden, ist es sehr angenehm dieselben auswendig zu wissen.

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,..;\quad \sqrt{3} = 1{,}732\,..;\quad \sqrt{5} = 2{,}236\,..$$

IX.

Endlich wollen wir noch bemerken, daß dasselbe Verfahren, welches wir im Vorhergehenden angewendet haben, um die Quadratwurzel aus einer mehr als zweiziffrigen Zahl zu ziehen, auch dazu dienen kann, die Quadratwurzel aus einer algebraischen Summe, welche mehr als zwei Glieder hat, auszuziehen, wie das folgende Beispiel zeigt.

$$\begin{array}{l|l}
9a^2 - 12ab + 30ac + 4b^2 - 20bc + 25c^2 & 3a - 2b + 5c \\
9a^2 & \\
\hline
6a \mid -12ab & \\
\quad\; -12ab & \\
\hline
\qquad\qquad + 4b^2 & \\
\qquad\qquad + 4b^2 & \\
6a - 4b \mid + 30ac - 20bc & \\
\qquad\qquad + 30ac - 20bc & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad + 25c^2 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 25c^2 & \\
\hline
\end{array}$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $\sqrt{(a^2 + 8ab - 6ac + 16b^2 - 24bc + 9c^2)} = a + 4b - 3c$

2) $\sqrt{(25 - 40x + 26x^2 - 8x^3 + x^4)} = 5 - 4x + x^2$

3) $\sqrt{(1 - 6x + 5x^2 + 24x^3 - 32x^4 - 24x^5 + 36x^6)} = 1 - 3x - 2x^2 + 6x^3$.

B. Von den Kuben und Kubikwurzeln.

§. 143. Erklärung.

Das Product, welches man erhält, wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt und dieses Product wieder mit der nämlichen Zahl multiplicirt, wird der Kubus dieser Zahl genannt. So ist z. B. der Kubus von 5 gleich $5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 125$. — Die Zahl aber, welche in Kubus erhoben werden muß, um eine gegebene Zahl zu erhalten, heißt die Kubikwurzel von dieser Zahl; so ist z. B. 5 die Kubikwurzel von 125. Man bezeichnet den Kubus von a durch a^3 und die Kubikwurzel aus a durch $\sqrt[3]{a}$.

§. 144. Zusatz.

Die Kuben der positiven Zahlen sind wieder positive und die Kuben der negativen Zahlen wieder negative Zahlen. So ist z. B.

$$(+4)^3 = (+4) \,.\, (+4) \,.\, (+4) = +64$$

und

$$(-4)^3 = (-4) \,.\, (-4) \,.\, (-4) = -64.$$

Hieraus folgt umgekehrt, daß die Kubikwurzeln aus positiven Zahlen wieder positiv und die Kubikwurzeln aus negativen Zahlen negativ sind. Es hat also die Kubikwurzel aus einer positiven oder negativen Zahl allemal einen reellen Werth. Diese Werthe sind jedoch in den meisten Fällen irrational und lassen sich daher nur näherungsweise darstellen.

Außer dem einen reellen Werthe hat jede Kubikwurzel aus einer positiven oder negativen Zahl noch zwei imaginäre Werthe. Wir berücksichtigen jedoch hier nur den reellen Werth.

§. 145. Lehrsatz.

Von den Kuben und Kubikwurzeln gelten folgende Sätze, welche in ähnlicher Art, wie die analogen Sätze über Quadrate und Quadratwurzeln, §§. 136 bis 142, erwiesen werden:

1) $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a} \,.\, \sqrt[3]{a} \,.\, \sqrt[3]{a} = a$

2) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3) $(a \,.\, b)^3 = a^3 \,.\, b^3$

4) $\sqrt[3]{(a^3 \,.\, b^3)} = a \,.\, b$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$

6) $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{a}{b}.$

Anhang.

Von dem numerischen Ausziehen der Kubikwurzeln.

1) Man verfährt hierbei nach der oben (§. 145) erwiesenen Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Da jedoch dieses Verfahren nur sehr selten Anwendung findet, indem bei weitem in den meisten Fällen die Logarithmentafeln oder unendliche Reihen unvergleichlich rascher zum Ziele führen, so beschränken wir uns darauf, zwei vollständig ausgerechnete Exempel herzusetzen.

	592 | 704	84
$a^3 =$	512	8 = a
$3a^2 =$	192 | 807	4 = b
$3ab^2 =$ (handschriftlich: $3a^2b$)	768	
	390	
$3ab^2 =$	384	
	64	
$b^3 =$	64	84 = Wurzel.

	105 | 154 | 048	472
$a^3 =$	64	4 = a
$3a^2 =$	48 | 411	7 = b
$3a^2b =$	336	
	755	
$3ab^2 =$	588	
	1674	
$b^3 =$	343	47 = a
$3a^2 =$	6627 | 13310	2 = b
$3a^2b =$	13254	
	564	
$3ab^2 =$	564	
	8	
$b^3 =$	8	472 = Wurzel.

2) Soll eine irrationale Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl näherungsweise in einer vorgeschriebenen Anzahl, z. B. in vier Decimalstellen gezogen werden, so verwandelt man dieselbe in einen Decimalbruch, indem man dreimal so viel, also 12 Nullen anhängt u. s. w.

3) Soll die Kubikwurzel aus einem Decimalbruche ausgezogen werden, so zieht man zuerst einen Strich durch das Komma und schneidet dann nach beiden Seiten hin je drei Ziffern ab u. s. w.

4) Soll man endlich die Kubikwurzel aus einem gemeinen Bruche ziehen, in welchem nicht Zähler und Nenner beide vollständige Kuben sind, so verwandelt man denselben vorher in einen Decimalbruch.

Zur weitern Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $\sqrt[3]{91125} = 45$
2) $\sqrt[3]{314432} = 68$
3) $\sqrt[3]{551368} = 82$
4) $\sqrt[3]{14886936} = 246$
5) $\sqrt[3]{188132517} = 573$
6) $\sqrt[3]{428661064} = 754$
7) $\sqrt[3]{5} = 1,709\,..$
8) $\sqrt[3]{99} = 4,626\,..$

Vierter Abschnitt.

Von den benannten Zahlen.

A. Die vier Species.

§. 146. Erklärung.

Die vorhergehenden Untersuchungen betrafen lediglich unbenannte Zahlen; wir wollen nun in diesem Abschnitte kurz die wichtigsten Anwendungen der vorhergehenden Sätze auf Größen zeigen, indem wir dieselben als benannte Zahlen ausdrücken. Wir bezeichnen auch hier durch die *kleinen lateinischen Buchstaben* a, b, c.. unbenannte Zahlen, durch die *großen Buchstaben* A, B, C.. aber Größen.

§. 147. Erklärung.

Wir stellen zunächst folgende Begriffsbestimmungen auf:

1) Zwei gleichartige Größen *addiren* heißt dieselben zu einer dritten Größe vereinigen.

2) Eine Größe heißt *größer* als eine andere gleichartige, wenn es eine dritte Größe gibt, welche zur letzten addirt die erste zur Summe gibt.

3) Eine kleinere Größe von einer größeren *subtrahiren*, heißt eine dritte Größe finden, welche zur kleineren addirt die größere zur Summe gibt.

4) Eine Größe A heißt ein Vielfaches einer anderen B, und B wird ein aliquoter Theil von A genannt, wenn die Größe A dadurch erhalten werden kann, daß man die Größe B wiederholt addirt. (So ist z. B. der Thaler ein Vielfaches des Groschen und der Groschen ein aliquoter Theil vom Thaler, weil 1 Thlr. = 30 Gr. ist.)

5) *Eine Größe* A (z. B. einen Thaler) *mit einer unbenannten ganzen Zahl* m (z. B. 7) *multipliciren*, heißt die Größe so oft addiren, als die unbenannte ganze Zahl anzeigt. Das Product, welches man hierdurch erhält, wird durch mA (7 Thlr.) bezeichnet. Man nennt diesen Ausdruck eine *benannte ganze Zahl*.

6) *Eine Größe* A (z. B. einen Thaler) *mit einem Bruche* $\frac{m}{n}\left(\text{z. B. } \frac{3}{4}\right)$ *multipliciren*, heißt den so vielten Theil, als der Nenner anzeigt, also den nten (vierten) Theil von A (vom Thaler) so oft addiren,

als der Zähler m (3) angibt. Das auf diese Art erhaltene Product bezeichnet man durch $\frac{m}{n}$ A $\left(\frac{3}{4}\text{ Thlr.}\right)$
und nennt diesen Ausdruck eine benannte gebrochene Zahl.

7) Wenn die Größe B dadurch erzeugt werden kann, daß man die Größe A mit einer unbenannten ganzen Zahl m oder mit einem Bruche $\frac{m}{n}$ multiplicirt, wenn also

$$B = mA \text{ oder } B = \frac{m}{n} A$$

ist, so sagt man, die Größe A sei in B mmal oder $\frac{m}{n}$mal enthalten. (So ist z. B. der Zoll im Fuße 12mal enthalten, weil 1 Fuß = 12 Zoll ist; der Fuß ist in der Elle $\frac{17}{8}$mal enthalten, weil 1 Elle = $\frac{17}{8}$ Fuß = $2\frac{1}{8}$ Fuß ist.)

8) Untersuchen, wie oft eine Größe A in einer andern B enthalten ist, wird Messen genannt; die Größe A, mit welcher man mißt, wird das Maß oder die Einheit und die durch das Messen gefundene unbenannte Zahl m oder $\frac{m}{n}$, welche anzeigt, wie oft die Einheit A in der auszumessenden Größe B enthalten ist, wird die Maßzahl genannt.

§. 148. Zusatz.

1) Eine benannte ganze Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie dadurch in eine gebrochene benannte Zahl verwandelt, daß man die Maßzahl mit der nämlichen ganzen Zahl multiplicirt und dividirt; so ist z. B., wie äußerst leicht zu zeigen,

$$3 \text{ Thlr.} = \frac{12}{4} \text{ Thlr.}$$

oder in allgemeinen Zeichen: $mA = \frac{m \,.\, n}{n} A.$

2) Eine benannte gebrochene Zahl bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner der Maßzahl (des Bruches) mit der nämlichen ganzen Zahl multiplicirt; so ist z. B., wie leicht zu zeigen,

$$\frac{3}{4} \text{ Thlr.} = \frac{3 \,.\, 6}{4 \,.\, 6} \text{ Thlr.} = \frac{18}{24} \text{ Thlr.}$$

oder in allgemeinen Zeichen: $\frac{m}{n} A = \frac{mp}{np} A.$

3) Gleichbenannte Zahlen werden addirt, wenn man ihre Maßzahlen addirt; so ist z. B.

$$5 \text{ Thlr.} + 7 \text{ Thlr.} = 12 \text{ Thlr.}$$

oder in allgemeinen Zeichen:

$$mA + nA = (m + n)A.$$

Ferner $\frac{3}{4} \text{ Thlr.} + \frac{2}{5} \text{ Thlr.} = \frac{23}{20} \text{ Thlr.};$

in allgemeinen Zeichen:

$$\frac{m}{n}A + \frac{p}{q}A = \frac{mq + np}{nq}A,$$

wie man sich leicht überzeugt, wenn man nach (2) die Brüche vor der Addition auf gleichen Nenner bringt.

4) Von zwei gleichbenannten Zahlen ist diejenige die größere, welche die größere Maßzahl hat, wie leicht aus §. 147, 2 folgt.

5) Gleichbenannte Zahlen werden von einander subtrahirt, wenn man ihre Maßzahlen von einander subtrahirt, wie unmittelbar aus Nro. 3 folgt.

6) Eine benannte Zahl wird mit einer unbenannten Zahl multiplicirt, wenn man die Maßzahl mit der unbenannten Zahl multiplicirt; so ist z. B.

$$3 \,.\, (7 \text{ Thlr.}) = (3 \,.\, 7) \text{ Thlr.} = 21 \text{ Thlr.}$$

oder in allgemeinen Zeichen: $m(nA) = (mn)A$,

ferner $$\frac{3}{4} \,.\, \left(\frac{5}{8} \text{ Thlr.}\right) = \frac{15}{32} \text{ Thlr.}$$

oder in allgemeinen Zeichen: $\frac{m}{n} \,.\, \left(\frac{p}{q}A\right) = \frac{mp}{nq}A$;

denn nach §. 147, 6 wird das Product $\frac{3}{4} \,.\, \left(\frac{5}{8} \text{ Thlr.}\right)$ erhalten, wenn man den vierten Theil von $\frac{5}{8}$ Thlr. dreimal addirt. Nach Nr. 2 ist aber $\frac{5}{8}$ Thlr. $= \frac{20}{32}$ Thlr. $= 4 \,.\, \frac{5}{32}$ Thlr.; folglich der vierte Theil von $\frac{5}{8}$ Thlr. $= \frac{5}{32}$ Thlr. und das Dreifache hiervon $\frac{15}{32}$ Thlr. — Eben so wird das Product $\frac{m}{n} \,.\, \left(\frac{p}{q}A\right)$ erhalten, wenn man den nten Theil von $\frac{p}{q}A$ mmal addirt. — Nun ist aber nach Nr. 2 $\frac{p}{q}A = \frac{np}{nq}A = n \,.\, \frac{p}{nq}A$, also der nte Theil von $\frac{p}{q}A = \frac{p}{nq}A$ und das mfache hiervon $\frac{mp}{nq}A$.

Bemerkung.

Zwei gleichartige Größen können nach dem Vorhergehenden addirt und subtrahirt werden. Dagegen würde es ungereimt sein, zwei Größen oder benannte Zahlen mit einander zu multipliciren. Eine benannte Zahl kann nur mit einer unbenannten Zahl multiplicirt werden. Anders liegt es jedoch in Hinsicht der Division, welche bekanntlich hervorgeht, indem man sich das Product und den einen Factor als gegeben denkt. Nun kann man sich in der Gleichung

$$mA = B$$

entweder das Product B und die unbenannte Zahl m oder das Product B und die Größe A als gegeben denken, wonach in der Division zwei Fälle zu unterscheiden sind.

§. 149. Erklärung.

1) Eine Größe durch eine unbenannte (ganze oder gebrochene) Zahl dividiren, heißt eine dritte Größe finden, welche mit der unbenannten Zahl multiplicirt die gegebene Größe zum Producte gibt, und

2) eine Größe durch eine andere gleichartige Größe dividiren, heißt eine unbenannte Zahl finden, welche mit der letzteren Größe multiplicirt die erstere zum Product gibt.

§. 150. Zusatz.

1) Eine benannte Zahl wird durch eine unbenannte dividirt, wenn man die Maßzahl dividirt. So ist z. B.

$$(mA) : n = \frac{m}{n}A,$$

wo m und n eben sowohl ganze als gebrochene Zahlen bedeuten können.

2) Zwei gleichbenannte Zahlen werden durcheinander dividirt, wenn man ihre Maßzahlen durcheinander dividirt. So ist z. B.

$$(mA) : (nA) = m : n.$$

Die Beweise für beide Behauptungen ergeben sich leicht aus §. 148, 6.

§. 151. Erklärung.

Wir haben im Vohergehenden gesehen, daß gleichbenannte Zahlen addirt oder subtrahirt werden, wenn man ihre Maßzahlen addirt oder subtrahirt. Hiernach ist z. B.

$$8A + 5A - 6A - 3A + 2A = (8 + 5 - 6 - 3 + 2)A.$$

So wie wir in der algebraischen Summe

$$8 + 5 - 6 - 3 + 2$$

additive oder subtractive Glieder unterschieden haben, so läßt sich dieselbe Unterscheidung auch auf die Größenverbindung

$$8A + 5A - 6A - 3A + 2A$$

übertragen. Weiter kann man auch, eben so wie bei der algebraischen Summe, einzelne Glieder von den übrigen getrennt betrachten und durch das vorgesetzte Zeichen (+) oder (—) anzeigen, daß dieselben in der Verbindung mit den übrigen Gliedern addirt oder subtrahirt werden sollen, z. B.

$$+5A, \; -6A.$$

Man nennt dergleichen Ausdrücke positive oder negative benannte Zahlen oder auch mit einem gemeinschaftlichen Namen entgegengesetzte Größen.

§. 152. Zusatz.

Die positiven oder negativen benannten Zahlen können nach denselben Regeln wie die absoluten benannten Zahlen, d. h. diejenigen benannten Zahlen, deren Maßzahl eine absolute ganze oder gebrochene Zahl ist, addirt, subtrahirt, multiplicirt oder dividirt werden. Man macht jedoch hiervon kaum irgend Gebrauch, weil man in der gewöhnlichen Rechenkunst alle Rechnungen nur in absoluten benannten oder unbenannten Zahlen ausführt und in der Algebra niemals die Größen, sondern die Maßzahlen derselben in die Rechnung aufnimmt.

Bei dem Ansatz einer Aufgabe steht es allemal in unserer Willkür, welche Größen wir als die positiven und welche wir als die negativen ansehen wollen. — Wenn z. B. zwei Personen A und B mit einander um Geld spielen und A seinen Gewinn mit (+), den Verlust mit (—) bezeichnet, so erhält in Beziehung auf B der Verlust das Zeichen (+) und der Gewinn das Zeichen (—). Wenn ein Körper sich auf einer Linie bald in der einen, bald in der entgegengesetzten Richtung bewegt, so kann man, um den Abstand des bewegten Körpers von einem in der Linie angenommenen festen Punkt auszudrücken, die in der einen Richtung durchlaufenen Wege mit (+), die in der entgegengesetzten Richtung zurückgelegten Wege mit (—) bezeichnen u. dgl. m.

B. Von den Proportionen.

§. 153. Erklärung.

Zwei gleichartige Größen lassen eine zweifache Vergleichung zu. Man kann nämlich erstens fragen, um wie viel und zweitens wie vielmal die eine

größer ist, als die andere. Das Resultat der ersten Vergleichung wird erhalten, wenn man die beiden Größen von einander subtrahirt, und ist folglich eine Differenz; das Resultat der andern Vergleichung wird gefunden, wenn man beide Größen durcheinander dividirt, und ist also ein Quotient. Das Resultat der Vergleichung zweier Größen wird überhaupt ihr Verhältniß genannt und zwar nennt man die Differenz zweier Größen das arithmetische Verhältniß und den Quotienten zweier Größen das geometrische Verhältniß derselben.

Da zwei gleichbenannte Zahlen subtrahirt oder dividirt werden, wenn man ihre Maßzahlen subtrahirt oder dividirt, so nennt man auch die Differenz zweier unbenannten Zahlen das arithmetische und den Quotienten zweier unbenannten Zahlen das geometrische Verhältniß derselben.

§. 154. Erklärung.

Eine Gleichung zwischen zwei arithmetischen Verhältnissen heißt eine arithmetische Proportion, und eine Gleichung zwischen zwei geometrischen Verhältnissen wird eine geometrische Proportion genannt. — Die arithmetische Proportion kann erstens eine Zahlenproportion sein, z. B.

$$7 - 4 = 12 - 9,$$

zweitens eine Größenproportion, z. B.

7 Ellen — 4 Ellen = 12 Ellen — 9 Ellen.

Eben so ist die geometrische Proportion entweder eine Zahlenproportion, z. B.

$$12 : 4 = 18 : 6$$

(lies: 12 verhält sich zu 4 wie 18 zu 6) oder eine Größenproportion, z. B.

12 Ellen : 4 Ellen = 18 Thlr. : 6 Thlr.

An einer jeden Proportion unterscheidet man vier Glieder. Von diesen werden das erste und letzte äußere Glieder und die beiden mittleren innere Glieder genannt. Ferner nennt man das erste und dritte Glied Vorderglieder und das zweite und vierte Hinterglieder.

In einer arithmetischen Größenproportion müssen alle Glieder gleichartig sein; in einer geometrischen Proportion gilt dies mit Nothwendigkeit nur von den Gliedern, welche ein Verhältniß bilden, wie das zuletzt angeführte Beispiel deutlich zeigt.

Eine Proportion, in welcher die inneren Glieder gleich sind, heißt stetig, und das gleiche Mittelglied wird die mittlere Proportionale zwischen den beiden äußeren Gliedern genannt. Eine geometrische stetige Zahlenproportion ist z. B. folgende:

$$4 : 6 = 6 : 9.$$

Im Folgenden wird nur von geometrischen Proportionen die Rede sein und unter dem Worte Proportion lediglich die geometrische verstanden werden, weil die Sätze über die arithmetische Proportion so an sich einleuchtend sind, daß es der besonderen Aufführung derselben nicht bedarf.

Die erheblichsten Sätze von der arithmetischen Proportion sind folgende:

1) In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder gleich der Summe der inneren Glieder; ist z. B.

$$a - b = c - d$$

gegeben, so ist

$$a + d = b + c,$$

wie sogleich in die Augen fällt, wenn man die subtractiven Glieder b und d transponirt.

2) In einer stetigen arithmetischen Proportion ist das Mittelglied gleich der halben Summe der beiden äußeren Glieder; ist z. B.

$$a - b = b - c$$

gegeben, so ist $$a + c = 2b,$$

folglich $$b = \frac{a + c}{2}.$$

Man nennt daher die halbe Summe zweier Zahlen auch das arithmetische Mittel derselben.

Der Name geometrische Proportion rührt von den alten Griechen her, welche auf diese Proportion vorzüglich durch geometrische Untersuchungen geführt worden sind, indem sie die Geometrie bei weitem mehr als die Arithmetik ausgebildet haben. An sich gehört die geometrische Proportion in ganz gleichem Maße wie die arithmetische der Arithmetik an.

§. 155. Zusatz.

1) Das (geometrische) Verhältniß zweier Größen A und B wird gefunden, wenn man beide durch eine dritte Größe C mißt und die erhaltenen Maßzahlen durch einander dividirt. Ist die Größe C in A mmal und in B nmal enthalten, so verhält sich
$$A : B = m : n;$$
und umgekehrt, wenn sich verhält
$$A : B = m : n;$$
so muß es eine dritte Größe geben, welche in A mmal und in B nmal enthalten ist.

2) Jede Größenproportion läßt sich in eine Zahlenproportion verwandeln, indem man statt der Größen ihre Maßzahlen setzt, wobei jedoch vorausgesetzt ist, daß diejenigen Größen, welche ein Verhältniß bilden, durch die nämliche Einheit gemessen sind. So kann man z. B. statt der Größenproportion
$$8 \text{ Th.} : 12 \text{ Th.} = 6 \text{ Gr.} : 9 \text{ Gr.}$$
auch die Zahlenproportion
$$8 : 12 = 6 : 9$$
setzen. — Eben so läßt sich umgekehrt jede Zahlenproportion in eine Größenproportion verwandeln, wenn man statt der Zahlen solche Größen setzt, welche diese Zahlen zu Maßzahlen haben, wobei wieder diejenigen Größen, welche ein Verhältniß bilden, durch die nämliche Einheit gemessen sein müssen.

Bemerkung.

Wir behandeln nun zuerst in den nächstfolgenden Sätzen §. 156 bis 167 die Zahlenproportion.

§. 156. Lehrsatz.

In jeder Zahlenproportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder; in Zeichen:

Wenn sich verhält $$a : b = c : d,$$

so ist $$a \,.\, d = b \,.\, c.$$

Bew. Nach der Voraussetzung ist
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Multipliciren wir beide Seiten dieser Gleichung mit dem Producte der Nenner b . d, so erhalten wir
$$\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d}$$

oder aufgehoben $$ad = bc.$$

So ist z. B. in der Proportion

$$3 : 5 = 9 : 15$$

das Product

$$3 . 15 = 5 . 9.$$

§. 157. Lehrsatz.

Sind zwei Producte als gleich gegeben, so bilden die Factoren des einen die äußeren und die Factoren des anderen die inneren Glieder einer richtigen Proportion; in Zeichen:

Ist

$$a . d = b . c$$

gegeben, so verhält sich

$$a : b = c : d.$$

Bew. Nach der Voraussetzung ist

$$a . d = b . c.$$

Dividiren wir beide Seiten dieser Gleichung durch b . d, (das Product der Hinterglieder der zu erweisenden Proportion), so erhalten wir

$$\frac{a . d}{b . d} = \frac{b . c}{b . d},$$

oder aufgehoben:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

und in Proportionen geschrieben:

$$a : b = c : d.$$

So läßt sich z. B. aus der Gleichung

$$4 . 6 = 3 . 8$$

die Proportion bilden

$$4 : 3 = 8 : 6.$$

§. 158. Lehrsatz.

In jeder Proportion lassen sich die Vorder- und Hinterglieder vertauschen; in Zeichen:

Wenn sich verhält

$$a : b = c : d,$$

so verhält sich auch

$$b : a = d : c.$$

Bew. Nach §. 156 ist in jeder Proportion das Product der inneren Glieder gleich dem Producte der äußeren Glieder, also

$$bc = ad.$$

Dividiren wir beide Seiten dieser Gleichung mit ac, (dem Producte der Hinterglieder der zu erweisenden Proportion), so erhalten wir

$$\frac{bc}{ac} = \frac{ad}{ac},$$

oder aufgehoben:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

und in Proportionen geschrieben:

$$b : a = d : c.$$

So erhält man z. B. aus der Proportion

$$2 : 3 = 8 : 12$$

durch Vertauschung der Vorder- und Hinterglieder die ebenfalls richtige Proportion

$$3 : 2 = 12 : 8.$$

§. 159. Lehrsatz.

In jeder Proportion lassen sich die Mittelglieder vertauschen; in Zeichen:

Wenn sich verhält

$$a : b = c : d,$$

so verhält sich auch

$$a : c = b : d.$$

Bew. Nach §. 156 ist $ad = bc.$

Dividiren wir beide Seiten dieser Gleichung durch cd, (das Product der Hinterglieder der zu erweisenden Proportion), so ergibt sich

$$\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd},$$

aufgehoben:
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

oder
$$a : c = b : d.$$

So ergibt sich z. B. aus der Proportion

$$3 : 12 = 5 : 20$$

durch Vertauschung der Mittelglieder die ebenfalls richtige Proportion

$$3 : 5 = 12 : 20.$$

§. 160. Lehrsatz.

In jeder Proportion lassen sich die äußeren Glieder vertauschen; in Zeichen:

Wenn sich verhält $a : b = c : d,$

so verhält sich auch $d : b = c : a.$

Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie bei den letzten §§.

So erhält man z. B. aus der Proportion

$$6 : 8 = 3 : 4$$

durch Vertauschung der äußeren Glieder die ebenfalls richtige Proportion

$$4 : 8 = 3 : 6.$$

§. 161. Lehrsatz.

1) Ist in einer Proportion

$$a : b = c : d$$

das erste Glied a eben so groß oder größer oder kleiner als das zweite b, so ist auch das dritte Glied c eben so groß oder größer oder kleiner als das vierte d, und wenn

2) das erste Glied a eben so groß oder größer oder kleiner als das dritte c ist, so ist auch das zweite Glied b eben so groß oder größer oder kleiner als das vierte d.

Bew. 1) Wenn $a = b$

ist, so ist der Bruch $\frac{a}{b} = 1.$

Nach der Voraussetzung ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$

also auch $\frac{c}{d} = 1,$

folglich $c = d.$

Wenn aber $a > b$ ist, so ist $\frac{a}{b} > 1$, folglich auch $\frac{c}{d} > 1$, also $c > d$; — und

wenn $a < b$ ist, so ist $\frac{a}{b} < 1$, folglich auch $\frac{c}{d} < 1$, also $c < d$.

Der Beweis von (2) ergibt sich unmittelbar aus (1), da sich nach §. 159 in jeder Proportion das zweite Glied b und das dritte Glied c vertauschen lassen.

§. 162. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum zweiten wie die Summe

oder Differenz des dritten und vierten Gliedes zum vierten; in Zeichen:

Wenn sich verhält $a : b = c : d,$

so verhält sich auch 1) $a + b : b = c + d : d$

und 2) $a - b : b = c - d : d.$

Bew. 1) Nach der Voraussetzung ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Addiren wir zu beiden Seiten dieser Gleichung 1, so erhalten wir

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1.$$

Statt der 1 auf der linken Seite setzen wir $\frac{b}{b}$ und statt der 1 auf der rechten Seite $\frac{d}{d}$; dann verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d},$$

wofür wir auch setzen können $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d},$

oder in Proportionen geschrieben:

$$a + b : b = c + d : d.$$

Der Beweis von (2) wird eben so geführt, mit dem einzigen Unterschiede, daß man nicht 1 addirt, sondern subtrahirt.

So erhält man z. B. aus der Proportion

$$15 : 10 = 3 : 2$$

durch Anwendung der so eben erwiesenen Sätze die ebenfalls richtigen Proportionen

$$25 : 10 = 5 : 2$$

und

$$5 : 10 = 1 : 2.$$

§. 163. Zusatz.

Da sich nach §. 158 in jeder Proportion das erste Glied mit dem zweiten und das dritte Glied mit dem vierten vertauschen lassen, so ergibt sich aus dem vorhergehenden §. auch noch der folgende Satz: — In jeder Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweiten Gliedes zum ersten wie die Summe des dritten und vierten zum dritten.

§. 164. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede; in Zeichen:

Wenn sich verhält $a : b = c : d,$

so verhält sich auch 1) $a + c : b + d = a : b$

und 2) $a - c : b - d = a : b.$

Bew. 1) Nach der Voraussetzung verhält sich

$$a : b = c : d$$

und da sich nach §. 159 in jeder Proportion die Mittelglieder vertauschen lassen, so können wir hierfür auch setzen

$$a : c = b : d.$$

Zufolge §. 162 verhält sich in jeder Proportion die Summe des ersten und zweiten Gliedes zum zweiten wie die Summe des dritten und vierten zum vierten, also $a + c : c = b + d : d.$

Vertauschen wir auch in dieser Proportion die Mittelglieder c und b + d, so verwandelt sich dieselbe in

$$a + c : b + d = c : d;$$

und da nach der Voraussetzung a : b = c : d ist, so können wir hierfür auch setzen $$a + c : b + d = a : b.$$

Der Beweis von (2) wird eben so geführt.

Hiernach ergeben sich z. B. aus der Proportion

$$20 : 15 = 4 : 3$$

die ebenfalls richtigen Proportionen

$$24 : 18 = 4 : 3$$

und $$16 : 12 = 4 : 3.$$

§. 165. Zusatz.

Sind mehrere Verhältnisse (Brüche) als gleich gegeben, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Ist z. B. $$a : b = c : d = f : g,$$
so ist auch $$a + c + f : b + d + g = a : b.$$

Bew. Nach der Voraussetzung ist

$$a : b = c : d,$$

folglich auch nach dem vorhergehenden §.

$$a + c : b + d = a : b,$$

oder da zufolge der Voraussetzung a : b = f : g ist,

$$a + c : b + d = f : g.$$

Wenden wir jetzt abermals den vorhergehenden §. an, (indem wir die Vorderglieder a + c und f und die Hinterglieder b + d und g addiren), so erhalten wir weiter $$a + c + f : b + d + g = f : g,$$
oder da f : g = a : b ist,

$$a + c + f : b + d + g = a : b.$$

Eben so kann dasselbe erwiesen werden, wenn vier oder mehr gleiche Verhältnisse gegeben sind.

Ist z. B. gegeben $$2 : 3 = 6 : 9 = 10 : 15,$$
so verhält sich auch $$2 + 6 + 10 : 3 + 9 + 15 = 2 : 3,$$
d. h. $$18 : 27 = 2 : 3.$$

§. 166. Lehrsatz.

Wenn in einer Proportion die drei ersten Glieder gegeben sind, so erhält man das vierte Glied, wenn man das Product der beiden inneren Glieder durch das erste Glied dividirt.

Bew. Wenn sich verhält $$a : b = c : x,$$
so ist nach §. 156 $$ax = bc,$$
folglich $$x = \frac{bc}{a}.$$

Auf diesem Satze beruht die Regeldetri in der gemeinen Rechenkunst. Wenn z. B. 16 ℔ 18 Thlr. kosten und der Preis von 28 ℔, welcher durch x Thlr. bezeichnet sein mag, berechnet werden soll, so hat man zunächst die Größenproportion

$$16 \text{ ℔} : 28 \text{ ℔} = 18 \text{ Thlr.} : x \text{ Thlr.}$$

und hieraus vermöge §. 155 die Zahlenproportion

$$16 : 28 = 18 : x,$$

also $$x = \frac{18 \,.\, 28}{16} = 31\tfrac{1}{2}.$$

Demnach kosten 28 ℔ 31½ Thlr.

Uebrigens brauchen wir wohl kaum zu bemerken, daß sich überhaupt aus irgend drei gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das fehlende Glied leicht berechnen läßt.

§. 167. Lehrsatz.

Wenn in einer stetigen Proportion die beiden äußeren Glieder gegeben sind, so ist das gleiche Mittelglied gleich der Quadratwurzel aus dem Producte der beiden äußeren Glieder.

Bew. Wenn sich verhält $a : x = x : b$,

so ist nach §. 156 $ab = x^2$,

folglich $x = \sqrt{ab}$.

Ist z. B. die Proportion gegeben

$$8 : x = x : 18,$$

so ist $x = \sqrt{8 \,.\, 18} = \sqrt{144} = 12$;

und in der That verhält sich $8 : 12 = 12 : 18$.

Das gleiche Mittelglied in einer stetigen geometrischen Proportion wird auch das geometrische Mittel zwischen den beiden äußeren Gliedern genannt. Hiernach ist also das geometrische Mittel zwischen 8 und 18 gleich 12, während das arithmetische Mittel zwischen 8 und 18 gleich $\frac{8 + 18}{2} = 13$ ist.

Ueberhaupt ist das arithmetische Mittel zweier ungleichen positiven Zahlen allemal größer als das geometrische Mittel derselben. Denn ist a von b verschieden, so ist

$$(a - b)^2 > 0,$$

also $a^2 - 2ab + b^2 > 0$,

daher $a^2 + b^2 > 2ab$

und $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$,

folglich, wenn wir auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausziehn,

$$a + b > 2\sqrt{ab},$$

also $\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}$.

Ist $a = b$, so ist sowohl das arithmetische als auch das geometrische Mittel wieder $= a$.

§. 168. Zusatz.

Da nach §. 155 sich jede Größenproportion in eine Zahlenproportion verwandeln läßt, indem man statt der Größen, welche ein Verhältniß bilden, ihre auf die nämliche Einheit bezogenen Maßzahlen setzt, und da durch das umgekehrte Verfahren jede Zahlenproportion in eine Größenproportion verwandelt werden kann, so gelten die im Vorhergehenden von Zahlenproportionen erwiesenen Sätze auch von Größenproportionen. Ausgenommen sind jedoch die §§. 156, 157, 166 und 167, indem es ungereimt sein würde, Größen mit einander zu multipliciren. Ferner können die §§. 159, 160, 164 und 165 natürlich nur auf solche Proportionen angewendet werden, in denen alle Glieder gleichartig sind.

§. 169. Erklärung.

1) Wenn die Größe A von der Größe B und die Größe A′ von der Größe B′ in der Art abhängt, daß sich verhält

$$A : A' = B : B'$$

so sagt man: die Größen A und A′ seien den Größen B und B′ gerade (direct) proportionirt.

Wenn z. B. ein bewegter Körper in jeder Secunde einen gleichen Weg durchläuft, welchen man die Geschwindigkeit nennt, so verhalten sich die

Räume S und S', welche der Körper in ungleichen Zeiten T und T' durchläuft, gerade wie diese Zeiten, also

$$S : S' = T : T'.$$

2) Wenn die Größe A von der Größe B und die Größe A' von der Größe B' in der Art abhängt, daß sich verhält

$$A : A' = B' : B$$

so sagt man, die Größen A und A' seien den Größen B und B' umgekehrt proportionirt.

Wenn z. B. zwei bewegte Körper den nämlichen Raum in ungleichen Zeiten durchlaufen, so verhalten sich die Geschwindigkeiten C und C' umgekehrt wie die Zeiten T und T', also $C : C' = T' : T.$

Zur Erläuterung können auch folgende Beispiele dienen:

1) Brüche mit gleichem Nenner verhalten sich gerade wie ihre Zähler; in Zeichen:

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b} = a : a'.$$

2) Brüche mit gleichen Zählern verhalten sich umgekehrt wie ihre Nenner; in Zeichen:

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{b'} = b' : b;$$

denn es ist

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{b'} = \frac{ab'}{ab} = \frac{b'}{b}.$$

§. 170. Lehrsatz.

Wenn zwei Größen A und A' von je zwei andern Größen B und B' und C und C' auf die Art abhängen, daß, wenn C = C' ist, sich verhält

$$A : A' = B : B',$$

und wenn B = B' ist, sich verhält

$$A : A' = C : C',$$

so ist überhaupt das Verhältniß

$$A : A' = (B : B') \times (C : C'),$$

oder wenn wir statt der Größen ihre Maßzahlen setzen und diese mit den nämlichen großen Buchstaben bezeichnen,

$$A : A' = B\,.\,C : B'\,.\,C'.$$

Man sagt in diesem Falle, das Verhältniß A : A' sei aus den Verhältnissen B : B' und C : C' zusammengesetzt.

Bew. Um größerer Anschaulichkeit willen wollen wir den Beweis an einem bestimmten Beispiele führen. — Es seien S und S' die von zwei bewegten Körpern durchlaufenen Räume, C und C' die Geschwindigkeiten derselben und T und T' die Zeiten der Bewegung; dann läßt sich zeigen, daß

$$S : S' = C\,.\,T : C'\,.\,T'$$

ist, d. h. daß die Wege sich wie die Producte aus den Zeiten und Geschwindigkeiten verhalten.

Um dieses darzuthun, denken wir uns einen dritten bewegten Körper, welcher mit dem ersten die gleiche Geschwindigkeit C und mit dem andern eine gleiche Dauer der Bewegung T' hat und bezeichnen den von diesem Körper mit der Geschwindigkeit C und in der Zeit T' durchlaufenen Raum mit S''. — Da die Wege zweier Körper bei gleichen Geschwindigkeiten sich offenbar wie die Zeiten verhalten, so ist

$$1)\quad S : S'' = T : T';$$

und da ferner bei gleicher Dauer der Bewegung sich die durchlaufenen Wege wie die Geschwindigkeiten verhalten, so ist

$$2)\quad S'' : S' = C : C'.$$

Multipliciren wir nun die Gleichungen (1) und (2) in einander nach der Regel: Brüche werden multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt, so erhalten wir

$$3)\quad S \,.\, S'' : S' \,.\, S'' = CT : C'T',$$

oder aufgehoben:

$$S : S' = CT : C'T'.$$

Das Verhältniß der Wege $S : S'$ ist also aus den Verhältnissen der Geschwindigkeiten $C : C'$ und dem Verhältnisse der Zeiten $T : T'$ zusammengesetzt.

§. 171. Zusatz.

Ein Verhältniß kann auch aus drei und mehr Verhältnissen zusammengesetzt sein.

Zur Erläuterung der beiden vorhergehenden §§. mögen noch folgende Beispiele dienen:

Die Geometrie lehrt, daß die Inhalte zweier Rechtecke sich bei gleichen Höhen wie ihre Grundlinien und bei gleichen Grundlinien wie ihre Höhen verhalten. Es stehen daher die Inhalte I und I' zweier Rechtecke überhaupt im zusammengesetzten Verhältnisse der Grundlinien g und g' und der Höhen h und h', also

$$I : I' = g \,.\, h : g' \,.\, h'.$$

Ferner wird in der Stereometrie bewiesen, daß zwei rechtwinkelige Parallelepipeda sich bei gleicher Länge und Breite wie ihre Höhen, bei gleicher Breite und Höhe wie ihre Längen, bei gleicher Länge und Höhe wie ihre Breiten verhalten.

Es stehen daher überhaupt zwei rechtwinkelige Parallelepipeda im zusammengesetzten Verhältnisse der Längen, Breiten und Höhen.

Sind also I und I' die Inhalte, a und a' die Längen, b und b' die Breiten, c und c' die Höhen zweier rechtwinkeligen Parallelepipeda, so ist

$$I : I' = a \,.\, b \,.\, c : a' \,.\, b' \,.\, c'.$$

Auf den beiden vorhergehenden §§. beruht auch die sogenannte Regula quinque der gemeinen Rechenkunst.

§. 172. Erklärung.

Wir haben im Vorhergehenden durchgehends angenommen, daß zwei gleichartige Größen, welche ein Verhältniß bilden, sich durch eine dritte Größe ohne Rest messen lassen; dergleichen Größen nennt man commensurabel. Gleichartige Größen können jedoch auch incommensurabel sein, d. h. es ist nicht möglich, beide durch ein und dieselbe dritte Größe zu messen, indem jede Größe, welche in der einen aufgeht, in der andern einen Rest läßt. Das Verhältniß incommensurabler Größen kann daher auch nie genau, sondern nur näherungsweise in Zahlen ausgedrückt werden; d. h. es lassen sich nur Zahlen angeben, welche entweder größer oder kleiner sind als das gesuchte Verhältniß. Man erhält dergleichen Näherungswerthe für das Verhältniß zweier incommensurablen Größen A und B, wenn man die eine B in eine bestimmte Anzahl, z. B. 100 gleiche Theile theilt und hierauf mit einem dieser Theile die andere Größe A mißt. Angenommen $\frac{1}{100}$ B sei in A 83mal enthalten und lasse dann noch einen Rest, welcher kleiner als $\frac{1}{100}$ B ist, so ist

$$A > \frac{83}{100} B, \text{ aber } A < \frac{84}{100} B,$$

folglich das gesuchte Verhältniß

$$\frac{A}{B} > \frac{83}{100}, \text{ aber } \frac{A}{B} < \frac{84}{100}.$$

Diese beiden Grenzen $\frac{83}{100}$ und $\frac{84}{100}$, zwischen denen das gesuchte Ver-

hältniß liegt, unterscheiden sich von einander um $\frac{1}{100}$, und es muß daher das Verhältniß A : B von jeder dieser Grenzen um weniger als $\frac{1}{100}$ verschieden sein. Noch engere Grenzen erhalten wir, wenn wir B in eine größere Anzahl, z. B. 1000 oder 10000 u. s. w. gleiche Theile theilen und mit einem dieser Theile A messen. Wie klein aber auch diese Theile sein mögen, niemals wird man dahin gelangen können, daß ein aliquoter Theil von B in A aufgeht, weil nach der Annahme die Größen A und B incommensurabel sind. Da wir hiernach nicht im Stande sind, das Verhältniß zweier incommensurablen Größen genau auszudrücken, sondern nur beliebig enge Grenzen anzugeben vermögen, zwischen denen dieses Verhältniß liegt, so ist dasselbe folglich eine Irrationalzahl.

So wie aber die allgemeinen Sätze der Arithmetik auch von den irrationalen Zahlen gelten, so gelten auch die im Vorhergehenden über die rationalen Verhältnisse commensurabler Größen erwiesenen Sätze ebenfalls von den irrationalen Verhältnissen incommensurabler Größen.

Wir bemerken nur noch, daß zwei irrationale Verhältnisse einander dann gleich gesetzt werden, wenn dieselben beständig zwischen den nämlichen Grenzen liegen.

Ein Beispiel zweier incommensurablen Größen sind die Diagonale und die Seite eines Quadrats, deren Verhältniß gleich der irrationalen $\sqrt{2} = 1{,}414..$ ist, ferner der Durchmesser und der Umfang eines Kreises, der Tag und das Jahr. Das irrationale Verhältniß bildet bei allen Anwendungen der Arithmetik, sei es in der Geometrie oder Naturlehre, nicht die Ausnahme, sondern die Regel. Das rationelle Verhältniß ist die selten anzutreffende Ausnahme.

So wie wir in den angeführten Fällen das gesuchte Verhältniß nur annähernd anzugeben im Stande sind, so gilt dies auch in allen praktischen Abmessungen oder Abwägungen. Auch hier gelangen wir niemals zu ganz genauen Resultaten, sondern begnügen uns mit Näherungswerthen, welche der Wahrheit um so näher gebracht werden können, je feiner und empfindlicher die angewendeten Instrumente sind.

Fünfter Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen.

A. Von den algebraischen Gleichungen im allgemeinen.

§. 173. Erklärung.

Alle Gleichungen zerfallen in zwei Classen, analytische und algebraische oder Bestimmungsgleichungen. Eine analytische Gleichung ist eine solche, welche immer richtig bleibt, welche Werthe man auch den in derselben vorkommenden Buchstaben beilegen mag. So sind fast alle in den drei ersten Abschnitten vorkommenden Gleichungen analytische, z. B. die Gleichungen

$$a . (b + c) = a . b + a . c$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

u. dgl. m., indem diese Gleichungen ganz allgemein gelten, was auch immer a, b und c bedeuten mögen.

Wenn dagegen eine Gleichung nur unter der Voraussetzung richtig ist, daß ein in derselben vorkommender Buchstabe einen (oder mehrere) bestimmte Werthe repräsentirt, so heißt die Gleichung in Beziehung auf diesen Buchstaben eine Bestimmungsgleichung; dieser Buchstabe wird die unbekannte Zahl, auch kurzweg die Unbekannte genannt. Gewöhnlich bezeichnet man die Unbekannte durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z. Eine Gleichung auflösen heißt den Werth (oder die Werthe) der Unbekannten finden. — Ein Werth der Unbekannten, welcher der Gleichung Genüge leistet, wird eine Wurzel derselben genannt.

Eine Bestimmungsgleichung ist z. B. eine geometrische Proportion, von welcher drei Glieder gegeben sind und das vierte gesucht wird; so die folgende

$$4 : 6 = 8 : x,$$

da diese Gleichung nur dann richtig ist, wenn $x = 12$ angenommen wird. Eine Bestimmungsgleichung ist ferner folgende

$$a + x = b,$$

da diese Gleichung nur unter der Voraussetzung richtig ist, daß $x = b - a$ gedacht wird, u. dgl. m.

Wenn in den folgenden §§. dieses Abschnitts das Wort Gleichung ohne Beisatz gebraucht wird, so ist hierunter in der Regel eine Bestimmungsgleichung zu verstehen.

Anm. In Betreff der Benennung Wurzel wollen wir noch darauf hinweisen, daß auch die Wurzeln aus Zahlen Wurzeln von Gleichungen sind; so ist z. B. $\sqrt{16} = 4$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 = 16$.

§. 174. Erklärung.*)

Die Bestimmungsgleichungen werden wieder eingetheilt in algebraische Gleichungen (im engeren Sinne) und in transcendente Gleichungen. In einer algebraischen Gleichung (im engeren Sinne) kann die Unbekannte x mit den übrigen Ausdrücken durch die vier Species verbunden sein, ferner sich in dem Dignanden einer Potenz oder dem Radicanden einer Wurzel finden. Die Gleichung heißt dagegen transcendent, wenn die Unbekannte x noch in irgend einer andern Art mit den übrigen Ausdrücken verbunden ist, wenn sich dieselbe z. B. in dem Exponenten einer Potenz oder einer Wurzel findet. Eine transcendente Gleichung ist z. B. die folgende

$$\sqrt[x]{8} = 2,$$

wo x, wie leicht zu sehen, $= 3$ ist; ferner die Gleichung

$$3^{2x-1} = 27,$$

wo $x = 2$ ist u. dgl. m.

Eine algebraische Gleichung heißt irrational, wenn x sich unter einem Wurzelzeichen (oder im Dignanden einer gebrochenen Potenz) findet; sie heißt rational, wenn dieses nicht der Fall ist.

In diesem Abschnitte wird hauptsächlich nur von rationalen algebraischen Gleichungen (im engeren Sinne) gehandelt werden.

§. 175. Erklärung.

Aus einer Gleichung lassen sich unzählige andere Gleichungen ableiten, indem man auf beiden Seiten den nämlichen Ausdruck addirt oder mit dem nämlichen Ausdrucke multiplicirt, dividirt u. s. w. Man nennt dies die Gleichung umformen.

*) Dieser §. ist beim ersten Unterrichte zu überschlagen und einer spätern Wiederholung vorzubehalten. — Dem mit dem Gegenstande noch ganz unbekannten Leser rathen wir noch außerdem, die Anmerkungen zu den einzelnen §§. früher als die §§. selbst durchzunehmen.

Da die beiden Seiten einer Gleichung in der Regel algebraische Summen sind, so werden dieselben mit einem Ausdrucke multiplicirt oder dividirt, indem man jedes Glied multiplicirt oder dividirt. Man erlaubt sich dann auch wohl zu sagen: Die ganze Gleichung wird multiplicirt oder dividirt, wofür es eigentlich heißen soll: jedes Glied der Gleichung wird multiplicirt oder dividirt.

§. 176. Erklärung.

Eine Gleichung, welche auf die Form

$$ax = b$$

gebracht werden kann, heißt eine Gleichung vom ersten Grade oder eine einfache Gleichung; eine Gleichung, welche auf die Form

$$ax^2 + bx = c$$

gebracht werden kann, wird eine Gleichung vom zweiten Grade oder eine quadratische Gleichung genannt u. s. w. Eine Gleichung heißt geordnet, wenn sie wirklich auf eine der angegebenen Formen gebracht ist.

§. 177. Lehrsatz.

In jeder (analytischen oder algebraischen) Gleichung kann man beliebig ein Glied auf der einen Seite weglassen und auf der andern Seite mit umgekehrtem Zeichen hinzufügen. Man nennt dies Transponiren.

Bew. Denn wenn man sich dieses Glied auf beiden Seiten mit umgekehrtem Zeichen addirt denkt, so fällt es auf der Seite weg, auf welcher es stand, und kommt auf der andern Seite mit umgekehrtem Zeichen hinzu.

Es sei z. B. die Gleichung $x - 3 = 9$ gegeben; um x zu finden, transponiren wir $- 3$, d. h. wir addiren auf beide Seiten $+ 3$; dann erhalten wir

$$x - 3 + 3 = 9 + 3$$

oder

$$x = 9 + 3 = 12.$$

Es sei ferner folgende Gleichung

$$2x + 5 = 8 - 3x + 12$$

gegeben. Um die Glieder mit x auf eine Seite, die Glieder ohne x auf die andere Seite zu bringen, transponiren wir $+ 5$ und $- 3x$, d. h. wir addiren auf beiden Seiten $- 5 + 3x$; dann erhalten wir

$$2x + 5 - 5 + 3x = 8 - 3x + 12 - 5 + 3x$$

oder

$$2x + 3x = 8 + 12 - 5.$$

(Ziehen wir zusammen, so ergibt sich weiter $5x = 15$, also $x = 3$.)

§. 178. Zusatz.

Wenn man in einer Gleichung die Zeichen aller Glieder umkehrt, so erhält man wieder eine richtige Gleichung.

Bew. Die Richtigkeit dieses Satzes fällt sogleich in die Augen, wenn man alle Glieder transponirt oder mit $- 1$ multiplicirt.

Es sei z. B. die Gleichung

$$1)\quad - 5x - 9 + 2x = x - 7$$

gegeben; transponiren wir alle Glieder, so entsteht die folgende Gleichung

$$2)\quad - x + 7 = + 5x + 9 - 2x,$$

wofür wir offenbar auch setzen können, indem wir die rechte und linke Seite vertauschen,

$$3)\quad 5x + 9 - 2x = - x + 7.$$

Diese Gleichung stimmt in allen Gliedern mit der Gleichung (1) überein und unterscheidet sich von derselben nur darin, daß jedes Glied das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten hat.

Man macht übrigens von dieser Umkehrung der Vorzeichen vorzüglich zu dem Zwecke Gebrauch, um Minuszeichen aus einer Gleichung wegzuschaffen. Ist z. B. die Gleichung

$$-8x = -32,$$

gegeben, so erhält man durch Umkehrung der Zeichen

$$+8x = +32$$

also $$x = 4.$$

B. Von den einfachen Gleichungen mit einer Unbekannten.

§. 179. Aufgabe.

Eine gegebene Gleichung nach x zu ordnen und dieselbe, wenn sie einfach ist, aufzulösen.

Aufl. 1) Wenn in der Gleichung zusammengesetzte Producte vorkommen, so verwandelt man dieselben nach §. 108 in algebraische Summen. (Man nennt dies gewöhnlich das Auflösen der Klammern.)

2) Wenn Glieder der Gleichung Brüche sind, so sucht man einen Generalnenner, in welchem sämmtliche Nenner aufgehen, und multiplicirt die ganze Gleichung mit demselben. Die Gleichung ist nun vom ersten Grade, wenn x weder im Quadrate, noch in einer höheren Potenz vorkommt. Dies vorausgesetzt bringt man

3) durch Transponiren die Glieder mit x auf die eine und die Glieder ohne x auf die andere Seite.

4) Hierauf zieht man die Glieder, welche x zum Factor haben, in ein Glied zusammen, nach der Regel: Producte, welche einen gleichen Factor haben, werden addirt oder subtrahirt, indem man die andern Factoren addirt oder subtrahirt und den gleichen Factor stehen läßt. Endlich

5) dividirt man beide Seiten der Gleichung durch den Factor von x.

Wenn aber die Gleichung, nachdem man 1) die Klammern aufgelöst und 2) die Brüche weggeschafft hat, x im Quadrate oder in einer höheren Potenz enthält, so kann man zwar noch 3) die Glieder mit x durch Transponiren auf die eine Seite und die Glieder ohne x auf die andere Seite bringen, ferner 4) diejenigen Glieder, welche gleich hohe Potenzen von x zum Factor haben, in ein Glied vereinigen und also die Gleichung ordnen. Die Auflösung derselben kann aber, (wenn nicht die x im Quadrate oder einer höhern Potenz enthaltenden Glieder sich aufheben), nicht mehr durch das unter Nro. 5 angegebene Verfahren bewerkstelligt werden.

Wir wollen nun die vorstehenden allgemeinen Regeln durch Beispiele erläutern.

I.

Es sei zunächst die Gleichung

$$1)\quad 12x - 9 = 7x + 6$$

gegeben. Wenn wir die Glieder mit x auf die linke, die Glieder ohne x auf die rechte Seite transponiren, so erhalten wir

$$12x - 7x = 6 + 9,$$

und wenn wir zusammenziehen, $$5x = 15.$$

Dividiren wir nun noch auf beiden Seiten mit 5, so ergibt sich

$$x = 3.$$

Es sei ferner gegeben die Gleichung

$$2)\quad 6x + 5 = 2x - 12 + 8x.$$

Wir transponiren zunächst und erhalten

$$6x - 2x - 8x = -12 - 5.$$

Hierauf ziehen wir zusammen, so heißt es

$$-4x = -17,$$

oder wenn wir die Zeichen umkehren,

$$+4x = +17,$$

und wenn wir endlich noch mit 4 dividiren,

$$x = 4\frac{1}{4}.$$

Am gewöhnlichsten transponirt man die Glieder mit x auf die linke Seite und die Glieder ohne x auf die rechte Seite. Man kann indeß natürlich auch umgekehrt verfahren, was in manchen Fällen vortheilhafter ist; so in dem letzten Beispiele

$$6x + 5 = 2x - 12 + 8x.$$

Transponiren wir hier die Glieder mit x auf die rechte und die Glieder ohne x auf die linke Seite, so erhalten wir

$$5 + 12 = 2x + 8x - 6x$$

oder zusammengezogen $17 = 4x,$

und wenn wir beiderseits durch 4 dividiren,

$$4\frac{1}{4} = x.$$

Dieses letzte Verfahren hat vor dem vorhergehenden den Vorzug gehabt, daß wir nicht nöthig hatten, die Zeichen umzukehren.

Zur weitern Uebung können folgende Beispiele dienen:

3) $8x + 12 = 36;$ $x = 3$
4) $7x - 5 = 9;$ $x = 2$
5) $4x = 30 - 2x;$ $x = 5$
6) $3 + 5x = 15 + 2x;$ $x = 4$
7) $6x - 12 = 5x - 4;$ $x = 8$
8) $4 - 8x = 3x + 20 - 13x;$ $x = 8$
9) $8x - 7 = 9x - 4 - 5x;$ $x = \frac{3}{4}$
10) $5x - 12 + 4x = 2 - 3x + 8x;$ $x = 3\frac{1}{2}$
11) $15 - 2x - 7x = 2x - 7;$ $x = 2$
12) $9 + 5x - 12 = 8x - 13 + 3x;$ $x = 1\frac{2}{3}$
13) $8x - 18 = x + 12 - 3x;$ $x = 3$
14) $4x + 15 - 3x = 6x - 3 - 8x;$ $x = -6$
15) $13 + 8x - 5 = 2x - 7 + 10x + 4;$ $x = 2\frac{3}{4}$
16) $13x - 7x - 12 - x = 8x + 9 + 5x;$ $x = -2\frac{5}{8}$
17) $x = 15 - 3x - 12x + 7 + 8x - 6;$ $x = 2.$

II.

Um die Gleichung

18) $$\frac{2}{3}x - 5\frac{1}{2} - x = 6\frac{1}{3} - \frac{3}{4}x$$

aufzulösen, schaffen wir zunächst die Brüche weg, indem wir die ganze Gleichung (d. h. jedes Glied der Gleichung) mit dem Generalnenner 12 multipliciren. Wir erhalten dann

$$8x - 66 - 12x = 76 - 9x,$$

ferner wenn wir transponiren

$$8x - 12x + 9x = 76 + 66$$

oder zusammengezogen $5x = 142,$

und wenn wir endlich noch beiderseits durch 5 dividiren,

$$x = 28\frac{2}{5}.$$

In ähnlicher Art sind die folgenden Beispiele zu behandeln:

19) $8 + \frac{1}{2}x = 3x - 7;$ $x = 6$

20) $\frac{1}{3}x - 6 + 2x = 8 + \frac{1}{2}x;$ $x = 7\frac{7}{11}$

21) $9\frac{3}{4} - \frac{5}{4}x = \frac{3}{8}x + 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x;$ $x = 2$

22) $4x - 15\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + 8\frac{3}{4} = 5\frac{1}{4}x - 7;$ $x = \frac{3}{7}$

23) $5\frac{2}{3}x + 6\frac{1}{2} - 3x - \frac{5}{2}x = 5\frac{1}{6};$ $x = -8$

24) $\frac{3}{4}x - 2x - \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}x = -9;$ $x = 6\frac{2}{3}$

25) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x - 5x = 12\frac{1}{2} - \frac{3}{5}x;$ $x = -5\frac{5}{149}$

26) $15 = \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}x - \frac{7}{9}x;$ $x = 4\frac{88}{113}$

27) $5x + 13\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x - 3\frac{4}{5}x = \frac{3}{4}x - 7;$ $x = -24\frac{28}{33}$

28) $\frac{2}{5}x + 15 - \frac{7}{15}x + \frac{1}{2}x = \frac{7}{12}x;$ $x = 100$

29) $-6 + \frac{3}{2}x + 12\frac{1}{4} - \frac{3}{8}x = \frac{7}{6}x - 5\frac{3}{8};$ $x = 279$

30) $5\frac{3}{8}x + 109 - 11\frac{1}{6}x = -5x + 248\frac{1}{2} - 11\frac{1}{3}x;$ $x = 13\frac{59}{253}$

31) $9 - \frac{1}{6}x + 4\frac{2}{3} - \frac{3}{4}x = -\frac{1}{10}x - 15 + \frac{1}{4}x;$ $x = 26\frac{7}{8}$

32) $25 - \frac{3}{7}x + 6x - 3\frac{2}{5}x - 4\frac{1}{7} = 0;$ $x = -9\frac{23}{38}.$

III.

Es sei ferner die Gleichung

33) $5\frac{1}{2} - 3 \cdot (8 + 2x) + 4 \cdot \left(5x - \frac{2}{3}\right) = 6x$

gegeben. Wenn wir zunächst die Klammern auflösen, d. h. die zusammengesetzten Produkte in algebraische Summen verwandeln, so erhalten wir

$$5\frac{1}{2} - 24 - 6x + 20x - \frac{8}{3} = 6x,$$

und wenn wir hierauf die Brüche wegschaffen, indem wir jedes Glied mit 6 multipliciren, und dann auf gewöhnliche Weise weiter rechnen,

$$33 - 144 - 36x + 120x - 16 = 36x$$
$$-36x + 120x - 36x = -33 + 144 + 16$$

$$48x = 127$$
$$x = 2\frac{31}{48}.$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

34) $135 - 7 . (45 - 4x) = 4 . (2x - 15)$; $x = 6$

35) $9x - 3 . (25 + 18x) = 35 - 13 . (30 + 5x)$; $x = -14$

36) $15x - 14 . (10 - 7x) = 95 + 7 . (14x - 25)$; $x = 4$

37) $5 . \left(\frac{1}{2} - 7x\right) + 3x = 3 . \left(\frac{3}{2}x + 5\frac{1}{4}\right)$; $x = -\frac{53}{146}$

38) $2x - 3 . \left(5 + \frac{3}{4}x\right) + \frac{2}{3} . (4 - x) - \frac{1}{4} . (3x - 16) = 0$; $x = -5$

39) $\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} . \left(6\frac{2}{9} - \frac{2}{3}x\right) = 5\frac{5}{6} - \frac{2}{3} . \left(\frac{1}{2}x - 35\right)$; $x = 42.$

IV.

Wir wollen nun die Regeln des vorhergehenden Lehrsatzes auf solche Beispiele anwenden, in denen außer der Unbekannten x noch andere Buchstaben (a, b, c...) vorkommen, welche jedoch als gegeben angesehen werden. Die nächsten Beispiele sind so einfach, daß es einer besonderen Anleitung zur Behandlung derselben nicht bedürfen wird.

40) $x + a = b$; $x = b - a$

41) $a + x - b = c$; $x = b + c - a$

42) $a - x = b$; $x = a - b$

43) $ax = b$; $x = \frac{b}{a}$

44) $ax - b = c$; $x = \frac{b + c}{a}$

45) $a - bx = c$; $x = \frac{a - c}{b}$

46) $5x - 8a + 3b = 4a - 3x$; $x = \frac{12a - 3b}{8}$

47) $6a - 2x - 5b = 4b - 6x - 2a$; $x = \frac{9b - 8a}{4}$

48) $8ax - b = 3ax$; $x = \frac{b}{5a}$

49) $4ab + 9cx = 7ab - 3cx$; $x = \frac{ab}{4c}$

50) $a^2 - 2bx + 3ab = 4bx - 5a^2$; $x = \frac{2a^2 + ab}{2b}$

51) $3g - 5h + 2mx = 2g + 4h - 3mx$; $x = \frac{9h - g}{5m}$

V.

Um die Gleichung

52) $ax + b = cx + d$

aufzulösen, transponiren wir zuerst und erhalten

$$ax - cx = d - b.$$

Hierauf ziehen wir zusammen nach der Regel: Produkte, welche einen gleichen Faktor haben u. s. w. und erhalten dann

$$(a - c) x = d - b.$$

Endlich dividiren wir beiderseits durch den Faktor von x, so ergibt sich

$$x = \frac{d - b}{a - c} = \frac{b - d}{c - a},$$

da nach §. 111 ein Bruch unverändert bleibt, wenn man im Zähler und Nenner alle Zeichen umkehrt.

Zur weiteren Uebung folgende Beispiele:

53) $ax - b = cx;$ $\qquad x = \frac{b}{a - c}$

54) $a - bx = cx;$ $\qquad x = \frac{a}{b + c}$

55) $a + bx = c - dx;$ $\qquad x = \frac{c - a}{b + d}$

56) $ax - b + cx = dx + f;$ $\qquad x = \frac{b + f}{a + c - d}$

57) $5a^2 - 3bx = 7a^2 - 4cx;$ $\qquad x = \frac{2a^2}{4c - 3b}$

58) $8ax + 2b^2 - 5cx = 2ax + 8b^2;$ $\qquad x = \frac{6b^2}{6a - 5c}$

59) $3ab - 4cx + 8dx = 2bd - 9cx;$ $\qquad x = \frac{b(2d - 3a)}{5c + 8d}$

60) $d^2 + fx = gx + h^2 - 7d^2;$ $\qquad x = \frac{h^2 - 8d^2}{f - g}$

61) $mx - a = b - x;$ $\qquad x = \frac{a + b}{m + 1}.$

VI.

Zur Auflösung der Gleichung

62) $$\frac{2x}{3a} - 5 + \frac{3x}{4b} = \frac{a}{6b}$$

suchen wir zunächst den Generalnenner, als welchen wir sehr leicht 12ab erkennen. Hiermit multipliciren wir jedes Glied der Gleichung und erhalten

$$8bx - 60ab + 9ax = 2a^2$$

und wenn wir dann transponiren,

$$8bx + 9ax = 2a^2 + 60ab;$$

ferner wenn wir zusammenziehen,

$$(8b + 9a)\,x = 2a(a + 30b),$$

und wenn wir endlich durch den Factor von x dividiren,

$$x = \frac{2a(a + 30b)}{9a + 8b}.$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

63) $\frac{x}{a} = b;$ $\qquad x = ab$

64) $\frac{ax}{b} = c;$ $\qquad x = \frac{bc}{a}$

65) $\frac{a}{x} = b;$ $\qquad x = \frac{a}{b}$

66) $\frac{ax}{b} + c = d;$ $\qquad x = \frac{b(d - c)}{a}$

67) $a - \frac{bc}{x} = d;$ $\qquad x = \frac{bc}{a - d}$

68) $x = a + \frac{bx}{c};$ $\qquad x = \frac{ac}{c - b}$

69) $\frac{x - a}{c} = b;$ $\qquad x = a + bc$

70) $\frac{a + bx}{c} = d;$ $\qquad x = \frac{cd - a}{b}$

71) $\frac{a}{x} + b = \frac{c}{x} - d;$ $\qquad x = \frac{c - a}{b + d}$

72) $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} = f + x;$ $\qquad x = \frac{bdf}{ad + bc - bd}$

73) $a + \frac{bx}{c} + \frac{dx}{f} + \frac{gx}{h} = k;$ $\qquad x = \frac{cfh\,(k - a)}{bfh + cdh + cfg}$

74) $\frac{x}{a} - b + \frac{cx}{ad} = g;$ $\qquad x = \frac{ad\,(b + g)}{c + d}$

75) $a - \frac{b}{cx} - \frac{d}{ex} - \frac{f}{gx} = 0;$ $\qquad x = \frac{beg + cdg + cef}{aceg}$

76) $\frac{3}{4}ax - 2bc + \frac{2}{3}a^2 = \frac{1}{2}bc - 3ax;$ $\qquad x = \frac{30bc - 8a^2}{45a}$

77) $\frac{3a}{x} - 6 = \frac{2a - x}{x};$ $\qquad x = \frac{a}{5}.$

VII.

In der Gleichung

78) $ax - b\,(c + x) = ad$

lösen wir zunächst die Klammern auf und erhalten

$$ax - bc - bx = ad,$$

und wenn wir dann auf gewöhnliche Weise weiter rechnen,

$$ax - bx = ad + bc$$
$$(a - b)x = ad + bc$$
$$x = \frac{ad + bc}{a - b}.$$

Zur weiteren Uebung folgende Beispiele:

79) $a\,(b + x) = c;$ $\qquad x = \frac{c - ab}{a}$

80) $ax = b\,(c - x);$ $\qquad x = \frac{bc}{a + b}$

81) $5ax = 3ab - 2b\,(x - 4a);$ $\qquad x = \frac{11ab}{5a + 2b}$

82) $2bx - 5b\,(x - 3c) + 3b\,(4c - 5x) = 9cx;$ $\qquad x = \frac{3bc}{2b + c}$

83) $(3a - 2b) . (x + 5a) - 8ab = 5ax - (2a - 4b) . (3x - b) + 4b^2;$ $\qquad x = \frac{5a(4b - 3a)}{2(2a - 7b)}$

84) $3a^2x - 5a(2ax - b^2) = 3x(b - a) . (b + a) - 4a^2x;$ $\qquad x = \frac{5a}{3}$

85) $10a^3 - (a - b)^2x = 5a(2a^2 - 3b^2 + 2bx) - a^2x;$ $\qquad x = \frac{15ab}{8a + b}$

86) $(a+3b)^2x - 5(2a-b)(2a-3b)x = 3a^2b - 6b^2x$; $\quad x = \frac{3ab}{46b - 19a}$

87) $-(2a+x)^2 = 2a^2 - (a-x)^2$; $\quad x = -\frac{5}{6}a$

88) $\frac{a(b+x)}{c} = d$; $\quad x = \frac{cd - ab}{a}$

89) $a\left(b + \frac{x}{c}\right) = d$; $\quad x = \frac{c(d - ab)}{a}$

90) $a\left(b - \frac{c}{x}\right) = d$; $\quad x = \frac{ac}{ab - d}$

VIII.

In der Gleichung

91) $$\frac{3x}{a} - \frac{2a - 5x}{3b} = \frac{4x + b}{2a} + 1$$

schaffen wir zuerst die Brüche weg, indem wir die ganze Gleichung mit dem Generalnenner 6ab multipliciren, und erhalten so

$$18bx - 2a(2a - 5x) = 3b(4x + b) + 6ab,$$

hierauf lösen wir die Klammern auf u. s. w.

$$18bx - 4a^2 + 10ax = 12bx + 3b^2 + 6ab$$
$$18bx + 10ax - 12bx = 4a^2 + 3b^2 + 6ab$$
$$10ax + 6bx = 4a^2 + 3b^2 + 6ab$$
$$x = \frac{4a^2 + 3b^2 + 6ab}{10a + 6b}.$$

In ähnlicher Art sind die folgenden Beispiele zu behandeln.

92) $\frac{a+x}{2b} - \frac{3a - 5x}{a} = \frac{7a}{3b} - 4$; $\quad x = \frac{a(11a - 6b)}{3(a + 10b)}$

93) $\frac{7a}{5b} + \frac{4a - x}{3b} = \frac{a}{15b} + 3 - \frac{2b - x}{b}$; $\quad x = \frac{8a - 3b}{4}$

94) $\frac{b - 2x}{3a} - \frac{5a^2}{2b^2} = \frac{x}{a} - 2 + \frac{a(x - a)}{b^2}$; $\quad x = \frac{2b^3 + 12ab^2 - 9a^3}{6a^2 + 10b^2}$

95) $\frac{3a^2}{4b} + 2x - \frac{(a - b)^2}{2a} = \frac{3bx}{5a} + b$; $\quad x = \frac{10b(a^2 + b^2) - 15a^3}{4b(10a - 3b)}$

96) $\frac{5ax}{a - b} - 3a = 8x$; $\quad x = \frac{3a(a - b)}{8b - 3a}$

97) $\frac{5x}{3a + b} - 2 = \frac{8b}{5a}$; $\quad x = \frac{30a^2 + 34ab + 8b^2}{25a}$

98) $\frac{a}{b + x} = \frac{c}{d - x}$; $\quad x = \frac{ad - bc}{a + c}$

99) $\frac{3a + x}{5a - b} = \frac{4x - b}{3a + 2b} - 1$; $\quad x = \frac{24a^2 + 18ab - 3b^2}{17a - 6b}$

100) $\frac{x}{a - b} - \frac{5a}{a + b} = \frac{2bx}{a^2 - b^2}$; $\quad x = 5a.$

101) $\frac{6a + 5b}{6a} - \frac{4bx}{3a^2} = 1 - \frac{bx}{a^2 + ab}$; $\quad x = \frac{5a(a + b)}{2(a + 4b)}$

102) $\frac{7x}{9a^2} - \frac{3}{2a} = \frac{9b + 14x}{18a^2 - 24ab}$; $\quad x = \frac{81(b - a)}{56b}$

103) $\frac{3x}{a+3b} + \frac{18bx}{a^2-9b^2} = 1;$ $x = \frac{a-3b}{3}$

104) $\frac{2x}{5a+4b} - \frac{3x}{5a-4b} = \frac{a^2-16b^2}{16b^2-25a^2};$ $x = \frac{4b-a}{5}$

105) $\frac{a+3x}{4a^2+6ab} - \frac{2x-a}{6ab-9b^2} = \frac{2a+x}{4a^2-9b^2};$ $x = \frac{a(4a^2-9b^2)}{8a^2+27b^2}$

106) $\frac{a+x}{2a-x} = \frac{2a-x}{a+x};$ $x = \frac{1}{2}a$

107) $\frac{x}{3a+x} + \frac{x}{3a-x} = \frac{a^2}{9a^2-x^2};$ $x = \frac{1}{6}a$

108) $\frac{1+x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x^2} = \frac{2}{1+x};$ $x = \frac{1}{5}$

IX.

In allen vorhergehenden Aufgaben haben wir die aufzulösende Gleichung als gegeben angenommen. Wir wollen nun noch einige Aufgaben hinzufügen, bei denen auch die Gleichung, durch welche die Auflösung erhalten wird, zu suchen ist.

1) Als ich eine gedachte Zahl mit 4 multiplicirte und zum Producte 5 addirte, erhielt ich 33. Wie heißt diese Zahl? — Antw. 7.

2) Welche Zahl gibt mit 3 multiplicirt und durch 4 dividirt 9? — Antw. 12.

3) Wenn ich zum fünften Theile einer Zahl 8 addire, so erhalte ich 15. Wie heißt die Zahl? — Antw. 35.

4) Von welcher Zahl betragen der 4te und 5te Theil zusammen 27? — Antw. 60.

5) Von welcher Zahl ist der dritte Theil um 4 größer als der vierte Theil? — Antw. 48.

6) Wenn ich von einer gedachten Zahl 7 subtrahire und den Rest durch 4 dividire, so erhalte ich 3. Welche Zahl ist es? — Antw. 19.

7) Wenn ich zu einer gedachten Zahl 15 addire und die Summe durch 4 dividire, so ist der Quotient der gedachten Zahl selbst gleich. Welche Zahl ist es? — Antw. 5.

8) Als ich eine gewisse Zahl mit 7 multiplicirte, von dem Producte 5 abzog und den Rest durch 8 dividirte, so war der Quotient um 1 kleiner als die Zahl selbst. Wie hieß diese Zahl? — Antw. 3.

9) 450 Thlr. sollen unter zwei Personen A und B so vertheilt werden, daß A anderthalbmal so viel erhält als B. Wie viel bekommt jeder? — Antw. A 270, B 180 Thlr.

10) Eine Wittwe soll nach dem Testamente ihres verstorbenen Ehemannes mit einem Sohne und einer Tochter 7800 Thlr. so theilen, daß der Sohn doppelt so viel als die Tochter, die Wittwe aber so viel als beide Kinder zusammen erhält. Wie viel bekommt jede dieser drei Personen? — Antw. Die Wittwe 3900, der Sohn 2600 und die Tochter 1300 Thlr.

11) 372 Thlr. sollen unter drei Personen A, B und C so vertheilt werden, daß A dreimal und B fünfmal so viel erhält als C. Wie viel bekommt jeder? — Antw. A 124, B 206⅔ und C 41⅓ Thlr.

12) 568 Thlr. sollen unter zwei Personen A und B so vertheilt werden, daß A so oft 5 Thlr. als B 3 Thlr. erhält. Wie viel bekommt jeder? — Antw. A 355, B 213 Thlr.

13) Eine Schuldmasse von 1500 Thlr. soll unter zwei Gläubiger nach Verhältniß ihrer Forderungen getheilt werden. Nun verhält sich die Forderung des A zu der des B wie 2 : 7. Wie viel erhält jeder? — Antw. A 333⅓, B 1166⅔ Thlr.

14) 6028 Thlr. sollen unter drei Personen A, B und C so vertheilt werden, daß sich der Antheil des A zu dem des B wie 4 zu 7 verhalte, und daß C so viel bekomme als A und B zusammen. Wie viel erhält jeder? — Antw. A 1096, B 1918, C 3014 Thlr.

15) Die Zahl a in zwei Theile zu zerlegen, welche sich wie m : n verhalten. Wie heißen die Theile?

Antw. $\frac{ma}{m+n}$ und $\frac{na}{m+n}$.

16) 135 Morgen sollen unter drei Bauern A, B und C so vertheilt werden, daß sich ihre Antheile wie die Zahlen 3, 5 und 7 verhalten. Wie viel bekommt jeder? — Antw. A 27, B 45 und C 63 Morgen.

17) Die Zahl a in drei Theile zu zerlegen, daß sich die Theile verhalten wie die Zahlen m, n und p. Wie heißen die Theile?

Antw. $\frac{ma}{m+n+p}$, $\frac{na}{m+n+p}$ und $\frac{pa}{m+n+p}$.

18) 455 Thlr. sollen unter drei Personen, A, B und C so vertheilt werden, daß sich der Antheil des A zu dem des B wie 2 : 3 und der Antheil des B zu dem des C wie 4 : 5 verhält. Wie viel bekommt jeder? — Antw. A 104, B 156, C 195 Thlr.

19) Die Zahl 798 soll in vier Theile so getheilt werden, daß sich der erste Theil zum zweiten wie 1 : 2, der zweite zum dritten wie 3 : 4, der dritte zum vierten wie 5 : 6 verhält. Welche Theile sind es? — Antw. 90, 180, 240 und 288.

20) Die Zahl a in drei Theile so zu zerlegen, daß sich der erste Theil zum zweiten wie m : n und der zweite Theil zum dritten wie p : q verhält. Welche Theile sind es?

Antw. $\frac{mpa}{mp+np+nq}$, $\frac{npa}{mp+np+nq}$, $\frac{nqa}{mp+np+nq}$.

21) Wie groß ist ein Capital, welches ein Jahr zu 5 Procent ausgeliehen ist, wenn am Ende des Jahres an Capital und Zinsen 1323 Thlr. zurückbezahlt werden? Antw. 1260 Thlr.

22) Ein Kaufmann verkauft den Centner einer gewissen Waare für 39 Thlr. 18 Sgr. und gewinnt hierbei 10 Procent. Wie theuer hat er den Centner eingekauft? Antw. Für 36 Thlr.

23) Wie groß ist ein Capital, welches mit den dreijährigen Zinsen, die jährlichen Zinsen zu 4 Procent gerechnet, 1680 Thlr. beträgt? — Antw. 1500 Thlr.

24) Ein Kaufmann verkauft das Pfund einer gewissen Waare für 19 Sgr. 6 Pf. und gewinnt hierbei $8^1/_3$ Procent. Wie theuer hat er den Centner (100 Pfund) eingekauft? — Antw. Für 60 Thlr.

25) Der ältere von zwei Brüdern ist jetzt 25 Jahre, der jüngere 11 Jahre alt. Nach wie viel Jahren wird der ältere Bruder doppelt so alt sein als der jüngere? — Antw. Nach 3 Jahren.

26) Nach wie viel Jahren wird der ältere Bruder nur anderthalbmal so alt sein als der jüngere? — Antw. Nach 17 Jahren.

27) Vor wie viel Jahren war der ältere Bruder dreimal so alt als der jüngere? Antw. Vor 4 Jahren.

28) Der Vater dieser beiden Brüder ist jetzt 54 Jahr alt; nach wie viel Jahren wird der Vater so alt sein wie seine beiden Söhne zusammen? — Antw. Nach 18 Jahren.

29) Vor wie viel Jahren war der Vater doppelt so alt als beide Söhne zusammen? — Antw. Vor 6 Jahren.

30) Aus einem Orte wird ein Courier abgeschickt, welcher stündlich $1^1/_4$ Meile zurücklegt. Drei Stunden nach dem Abgange desselben wird ihm ein anderer Courier

nachgeschickt, welcher in jeder Stunde $1\frac{1}{2}$ Meile macht. Nach wie viel Stunden holt der zweite Courier den ersten ein? — Antw. 15 Stunden nach dem Abgange des zweiten Couriers.

31) Aus einem Orte geht auf einer Eisenbahn der Güterzug um 7 Uhr Morgens und der Personenzug um 9 Uhr Morgens ab. Wenn nun der Güterzug alle 3 Stunden 7 Meilen und der Personenzug alle 2 Stunden 9 Meilen zurückgelegt; nach wie viel Stunden holt der Personenzug den Güterzug ein? — Antw. Nach $2\frac{2}{13}$ Stunden.

32) Wenn zwei Körper sich von demselben Punkte aus auf der nämlichen Linie bewegen und der eine in jeder Secunde c Fuß, der andere C Fuß zurücklegt, der letztere aber seine Bewegung t Secunden später beginnt; nach wie viel Secunden holt der zweite den ersten ein? —

Antw. Nach $\frac{ct}{C - c}$ Secunden.

33) Aus einem Orte A geht auf einer Eisenbahn nach einem Orte B hin ein Dampfwagen, welcher in jeder Stunde 3 Meilen macht, und zu gleicher Zeit geht aus dem Orte B nach A hin ein Dampfwagen, welcher in jeder Stunde 5 Meilen macht; wenn nun die beiden Orte um 50 Meilen von einander entfernt sind, nach wie viel Stunden und in welcher Entfernung von A treffen beide Dampfwagen zusammen? — Antw. Nach $6\frac{1}{4}$ Stunden und $18\frac{3}{4}$ Meilen von A.

34) Aus zwei Orten A und B, welche 28 Meilen von einander entfernt sind, werden gleichzeitig zwei Couriere einander entgegengeschickt, von denen der eine in 3 Stunden 5 Meilen, der andere in 4 Stunden 5 Meilen zurückgelegt; nach wie viel Stunden treffen dieselben zusammen? — Antw. Nach $9\frac{3}{5}$ Stunden.

35) Zwei Körper, deren ursprüngliche Entfernung a Fuß beträgt, bewegen sich gegen einander; der eine macht in jeder Secunde C, der andere c Fuß. Nach wie viel Secunden treffen sie zusammen?

Antw. Nach $\frac{a}{c + C}$ Secunden.

36) Um 12 Uhr stehen beide Zeiger einer Uhr übereinander. Wann treffen sie wieder zusammen? — Antw. $5\frac{3}{11}$ Minuten nach 1 Uhr, dann $10\frac{10}{11}$ Minuten nach 2 Uhr u. s. w.

37) Die Erde vollendet ihren Umlauf um die Sonne in 12, die Venus (ohngefähr) in $7\frac{3}{8}$ Monaten: nach wie viel Monaten werden Erde und Venus wieder die nämliche relative Stellung gegen die Sonne einnehmen? — Antw. Nach $19\frac{5}{37}$ Monaten. (Wenn sich uns daher die Venus zu irgend einer Zeit in der größten östlichen Ausweichung als Abendstern oder in der größten westlichen Ausweichung als Morgenstern zeigt, so wird dasselbe ohngefähr nach 1 Jahre und 7 Monaten wieder der Fall sein).

38) Auf der Peripherie eines Kreises, welche p Fuß mißt, bewegen sich zwei Körper von demselben Punkte ausgehend in gleicher Richtung mit den ungleichen Geschwindigkeiten C und c. Wann treffen dieselben zum ersten, zweiten, dritten Male u. s. w. zusammen?

Antw. Nach $\frac{p}{C - c}$, $\frac{2p}{C - c}$, $\frac{3p}{C - c}$ u. s. w. Secunden.

*38) Wann aber, wenn der mit der kleineren Geschwindigkeit c bewegte Körper dem andern ursprünglich um d Fuß voraus war?

Antw. Nach $\frac{d}{C - c}$, $\frac{d + p}{C - c}$, $\frac{d + 2p}{C - c}$ u. s. w. Secunden.

39) 25 Quart zu starken Essigs, von welchem das Quart 8 Sgr. kostet, sollen mit Wasser so verdünnt werden, daß das Quart der Mischung auf 6 Sgr. zu stehen kommt. Wie viel Quart Wasser müssen zugesetzt werden? — Antw. $8\frac{1}{3}$ Quart.

40) Wie viel Mark Kupfer (1 Mark = 16 Loth) müssen zu 18 Mark 14löthigem Silber (d. h. Silber, von welchem 1 Mark aus 14 Loth Silber und 2 Loth Kupfer besteht), hinzugesetzt werden, wenn die Mischung 12löthig sein soll? — Antw. 3 Mark.

41) In welchem Verhältnisse müssen 15löthiges und 10löthiges Silber miteinander vermischt werden, um 30 Mark 12löthiges Silber zu erhalten? — Antw. 12 Mark 15löthiges Silber müssen mit 18 Mark 10löthigem Silber verbunden werden.

42) Ein Kaufmann hat zweierlei Tabak. Von der einen Sorte kostet das Pfund 15 Sgr., von der andern 7 Sgr. Er will aus beiden Sorten eine Mischung von 50 Pfund machen, so daß er das Pfund zu 9 Sgr. verkaufen kann. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen? — Antw. $12\frac{1}{2}$ Pfund von der besseren und $37\frac{1}{2}$ Pfund von der schlechteren.

43) Von einer gewissen Waare kostet das Pfund der besseren Sorte m Gr. und das Pfund der schlechteren Sorte n Gr. Wie viel Pfund muß man von jeder Sorte nehmen und mit einander vermischen, um a Pfund einer Mittelsorte zu erhalten, von welcher das Pfund p Gr. kostet?

Antw. Von der besseren $\frac{a(p-n)}{m-n}$ und von der schlechteren $\frac{a(m-p)}{m-n}$.

44) Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, durch die eine allein in 4, durch die andere in 6 Stunden; in welcher Zeit wird derselbe voll werden, wenn beide Röhren zugleich geöffnet sind? — Antw. In $2\frac{2}{5}$ Stunden.

45) In einen Wasserbehälter münden drei Röhren; die erste allein würde denselben in 3, die zweite in 4, die dritte in 6 Stunden füllen. In welcher Zeit wird derselbe gefüllt, wenn alle drei Röhren zugleich in Thätigkeit sind? — Antw. In $1\frac{1}{3}$ Stunden.

46) Um die vorhergehende Aufgabe allgemeiner zu machen, bezeichnen wir die Zeiten, in denen jede einzelne Röhre den Behälter zu füllen im Stande ist, mit a, b und c; dann ist die Zeit, in welcher alle drei zusammen denselben füllen, gleich

$$\frac{abc}{ab + ac + bc}.$$

47) In Berlin ist der längste Tag um $9\frac{1}{2}$ Stunden länger, als die kürzeste Nacht. Wie lang ist hiernach der längste Tag und die kürzeste Nacht? — Antw. $16\frac{3}{4}$ und $7\frac{1}{4}$ Stunden.

48) Eine Magd erhält als jährlichen Lohn ein Stück Leinwand und 15 Thlr. Nach 7 Monaten fordert sie ihren Abschied und erhält außer dem Stück Leinwand noch $7\frac{1}{2}$ Thlr. Wie hoch wurde die Leinwand angerechnet? — Antw. Zu 3 Thlr.

49) Ein Arbeiter erhielt einmal für 7 Tage Arbeit 1 Scheffel Roggen und 17 Sgr., und ein anderes Mal für 12 Tage Arbeit 2 Scheffel Roggen und 16 Sgr. Wie hoch wurde der Scheffel Roggen gerechnet? — Antw. Zu 1 Thlr. 16 Sgr.

50) Ein Sterbender vermacht in seinem Testamente die Hälfte seines Vermögens der Kirche, den dritten Theil der Schule und die noch übrigen 500 Thlr. den Armen. Wie hoch beläuft sich das hinterlassene Vermögen? — Antw. Auf 3000 Thlr.

51) Welche Zahl muß zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{4}{15}$ addirt werden, wenn derselbe gleich $\frac{1}{2}$ werden soll? — Antw. 7.

52) Welche Zahl muß man von dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{13}{16}$ subtrahiren, wenn derselbe gleich $\frac{3}{4}$ werden soll? — Antw. 4.

53) Welche Zahl muß zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ addirt werden, wenn derselbe gleich $\frac{c}{d}$ werden soll? — Antw. $\frac{bc - ad}{d - c}$.

54) Welche Zahl muß man zu dem Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ addiren und vom Nenner subtrahiren, wenn derselbe gleich $\frac{c}{d}$ werden soll? — Antw. $\frac{bc - ad}{c + d}$.

55) Durch welche Zahl muß man 315 dividiren, wenn der Quotient gleich 24 und der Rest der Division gleich 3 sein soll? — Antw. 13.

56) In welche zwei Theile muß man 45 zerlegen, damit der größere durch den kleineren dividirt 5 zum Quotienten und 3 zum Rest gebe? — Antw. 38 und 7.

57) Es sollen drei Zahlen gefunden werden, die so beschaffen sind, daß sie zusammen 103 ausmachen und die zweite durch die erste dividirt 3 zum Quotienten und 2 zum Rest und die dritte durch die zweite dividirt 4 zum Quotienten und 13 zum Rest gibt. Welche Zahlen sind es? — Antw. 5, 17, 81.

C. Von den einfachen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 180. Erklärung.

Obschon wir im Vorhergehenden die Unbekannte durchgehends mit x bezeichnet haben, so ist doch klar, daß auch jeder andere in einer Gleichung vorkommende Buchstabe als gesucht angesehen und die Aufgabe gestellt werden kann, die Gleichung in Beziehung auf jeden beliebigen in derselben vorkommenden Buchstaben aufzulösen. Behalten wir indeß die früher aufgestellte Regel bei, daß wir die Unbekannten mit den letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnen, die ersten Buchstaben des Alphabets dagegen als gegeben ansehen, so heißt eine Gleichung mit zwei Unbekannten x und y **vom ersten Grade**, wenn sie auf die Form

$$ax + by = c$$

gebracht werden kann; und sie heißt **geordnet**, wenn sie wirklich auf diese Form gebracht ist.

§. 181. Zusatz.

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten kann, wie leicht zu sehen, allein nicht ausreichen, um die beiden Unbekannten zu bestimmen. Es müssen vielmehr zu diesem Zwecke zwei Gleichungen gegeben sein. Wie aus diesen die beiden Unbekannten gefunden werden können, werden wir im folgenden §. zeigen.

Wir wollen als die beiden gegebenen Gleichungen, z. B. die folgenden

$$ax + by = c$$

und

$$dx + fy = g$$

annehmen. Um nun aus diesen Gleichungen die eine Unbekannte, z. B. x zu finden, muß man die andere y **eliminiren**; d. h. man muß die beiden gegebenen Gleichungen so mit einander verbinden, daß eine dritte Gleichung entsteht, in welcher nur noch die eine Unbekannte enthalten ist (und den nämlichen Werth wie in den beiden gegebenen Gleichungen repräsentirt), dagegen die andere Unbekannte y fehlt. Man nennt diese dritte Gleichung **Eliminationsgleichung**.

§. 182, a. Aufgabe.

Die beiden einfachen Gleichungen

$$1)\quad ax + by = c$$

und

$$2)\quad dx + fy = g$$

nach x und y aufzulösen.

Aufl. Um zunächst x zu finden, eliminiren wir y. Hierzu gelangen wir, indem wir die erste Gleichung mit dem Coefficienten f von y in der zweiten Gleichung und die zweite Gleichung mit dem Coeffizienten b von y

in der ersten Gleichung multipliciren, in einer dieser beiden Gleichungen, z. B. in der zweiten die Zeichen umkehren und dann beide Gleichungen addiren. Wir erhalten so

$$afx + bfy = cf$$

und

$$\frac{-bdx - bfy = -bg}{(af - bd)x = cf - bg,}$$

folglich

$$x = \frac{cf - bg}{af - bd}$$

Um nun weiter y zu finden, können wir auf zweifache Art verfahren. Entweder wir setzen den erhaltenen Werth von x in eine der beiden gegebenen Gleichungen ein und suchen aus derselben y, oder was im vorliegenden Falle noch bequemer ist, wir eliminiren x zwischen den beiden gegebenen Gleichungen

$$ax + by = c$$

und

$$dx + fy = g,$$

indem wir die obere mit d, die untere mit a multipliciren, in der einen der so erhaltenen Gleichungen, z. B. in der zweiten, die Zeichen umkehren und dann beide Gleichungen addiren. Wir erhalten so

$$adx + bdy = cd$$

und

$$\frac{-adx - afy = -ag}{(bd - af)y = cd - ag,}$$

folglich

$$y = \frac{cd - ag}{bd - af}$$

oder

$$y = \frac{ag - cd}{af - bd},$$

indem ein Bruch unverändert bleibt, wenn man im Zähler und Nenner alle Zeichen umkehrt.

I.

Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen:

$$1. \begin{cases} 5x - y = 31 \\ 3x + y = 25. \end{cases}$$

Um y zu eliminiren, haben wir nur nöthig, diese beiden Gleichungen zu addiren; wir erhalten so

$$8x = 56,$$

folglich

$$x = 7.$$

Setzen wir diesen Werth von x in die zweite ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$21 + y = 25.$$

woraus folgt

$$y = 4.$$

Es sei ferner gegeben

$$2. \begin{cases} x + 5y = 14 \\ 3x - 4y = 4. \end{cases}$$

Wir eliminiren hier am bequemsten x, indem wir die erste Gleichung mit 3 multipliciren und die zweite mit umgekehrten Zeichen darunter setzen und hierauf addiren.

$$3x + 15y = 42$$

$$\frac{-3x + 4y = -4}{19y = 38,}$$

also

$$y = 2.$$

Setzen wir diesen Werth in die erste Gleichung ein, so ergibt sich

$$x + 10 = 14,$$

also

$$x = 4.$$

Endlich wollen wir noch folgendes Beispiel vollständig ausrechnen:

$$3. \begin{cases} 5x + 8y = 63 \\ 7x + 3y = 39. \end{cases}$$

Wir eliminiren zwischen diesen beiden Gleichungen eine Unbekannte, z. B. y, indem wir die erste Gleichung mit 3, die letzte mit 8 multipliciren und in der ersten die Zeichen umkehren,

$$\begin{array}{rcl} -15x - 24y &=& -189 \\ +56x + 24y &=& +312 \\ \hline 41x &=& 123, \end{array}$$

folglich

$$x = 3.$$

Setzen wir diesen Werth von x z. B. in die zweite Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$21 + 3y = 39,$$

oder

$$3y = 18,$$

also

$$y = 6.$$

Zur weiteren **Uebung** können folgende Beispiele dienen:

4. $\left\{\begin{array}{l} x + y = 24 \\ x - y = 16 \end{array}\right\} x = 20,\ y = 4$

*4. $\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y = 29 \\ 3x - 5y = -20 \end{array}\right\} x = 5,\ y = 7$

5. $\left\{\begin{array}{l} 3x + y = 31 \\ 5x - 2y = 15 \end{array}\right\} x = 7,\ y = 10$

6. $\left\{\begin{array}{l} 4x - 7y = 19 \\ x + 9y = 37 \end{array}\right\} x = 10,\ y = 3$

7. $\left\{\begin{array}{l} 5x + 4y = 49\frac{1}{2} \\ 2x + 7y = 63 \end{array}\right\} x = 3\frac{1}{2},\ y = 8$

8. $\left\{\begin{array}{l} 5x = 3y = 12 \\ 19x - 5y = 73\frac{1}{3} \end{array}\right\} x = 5,\ y = 4\frac{1}{3}$

9. $\left\{\begin{array}{l} -3x + 16y = 5 \\ 5x + 28y = 19 \end{array}\right\} x = 1,\ y = \frac{1}{2}$

10. $\left\{\begin{array}{l} 24x - 7y = 27 \\ 8x + 33y = 115 \end{array}\right\} x = 2,\ y = 3$

11. $\left\{\begin{array}{l} -7x + 13y = 99 \\ 28x - 9y = -52 \end{array}\right\} x = \frac{5}{7},\ y = 8$

12. $\left\{\begin{array}{l} 23x + 15y = 4\frac{1}{4} \\ 48x + 45y = 18 \end{array}\right\} x = -\frac{1}{4},\ y = \frac{2}{3}$

13. $\left\{\begin{array}{l} 16x + 17y = 274 \\ 24x - 105y = 150 \end{array}\right\} x = 15,\ y = 2$

14. $\left\{\begin{array}{l} 21x + 8y = -66 \\ 28x - 23y = 13 \end{array}\right\} x = -2,\ y = -3$

15. $\left\{\begin{array}{l} 18x - 20y = 1 \\ 15x + 16y = 9 \end{array}\right\} x = \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{4}$

16. $\left\{\begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ 25x + 48y = 287 \end{array}\right\} x = 7,\ y = 2\frac{1}{3}.$

II.

In allen vorhergehenden Beispielen waren die gegebenen Gleichungen bereits geordnet. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, so hat man die Gleichungen zuerst zu ordnen; so in dem folgenden Beispiele.

17. $\begin{cases} \frac{1}{4}y = 6 - \frac{2}{3}x \\ 5x = 4y - 2. \end{cases}$

Wenn wir hier zunächst in der ersten Gleichung die Brüche wegschaffen, so erhalten wir

$$3y = 72 - 8x,$$

und wenn wir transportiren,

$$\text{a)}\ 8x + 3y = 72,$$

ferner, wenn wir in der zweiten gegebenen Gleichung transportiren,

$$\text{b)}\ 5x - 4y = -2.$$

Wenn wir nun, um y zwischen den beiden Gleichungen (a) und (b) zu eliminiren, die erste mit 4, die letzte mit 3 multipliciren und hierauf die entstandenen Gleichungen addiren, so bekommen wir

$$\begin{array}{rl} 32x + 12y &= 288 \\ 15x - 12y &= -6 \\ \hline 47x \quad\quad &= 282, \end{array}$$

also

$$x = 6.$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (a) ein, so geht dieselbe über in

$$48 + 3y = 72$$

oder

$$3y = 24,$$

folglich

$$y = 8.$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

18. $\left\{\begin{array}{l} 4 + y = \frac{3}{4}x \\ \frac{4}{5}y - x = -8 \end{array}\right\} x = 12,\ y = 5.$

19. $\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}x = 10 - \frac{1}{2}y \\ 4\frac{3}{4}y = 5x - 7 \end{array}\right\} x = 9,\ y = 8.$

20. $\left\{\begin{array}{l} 2\frac{4}{9}y - \frac{5}{6}x = 90 \\ 2\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 90 \end{array}\right\} x = 24,\ y = 45.$

§. 182, b. Zusatz.

Außer dem in §. 182, a angegebenen Verfahren, welches das Additions-verfahren genannt wird, kann man zur Auflösung zweier einfachen Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$ax + by = c$$
$$dx + fy = g$$

auch auf folgendem Wege gelangen, welcher das Substitutionsverfahren genannt wird:

Man ziehe den Werth der einen Unbekannten aus einer der gegebenen Gleichungen, z. B. den Werth von y aus der ersten Gleichung, also

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

und setze diesen Werth in die andere Gleichung ein, so erhält man die Eliminationsgleichung

$$dx + f \cdot \frac{(c - ax)}{b} = g,$$

oder wenn man den Bruch wegschafft und zugleich die Klammern auflöst,

$$bdx + cf - afx = bg$$

oder zusammengezogen $(bd - af)x = bg - cf,$

also $$x = \frac{bg - cf}{bd - af},$$

oder wenn man im Zähler und Nenner die Zeichen umkehrt,

$$x = \frac{cf - bg}{af - bd},$$

eben so wie im vorhergehenden §. — Um ferner y zu erhalten, kann man entweder nach dem nämlichen Verfahren x eliminiren oder den gefundenen Werth von x in eine der gegebenen Gleichungen einsetzen.

Endlich wollen wir zur Auflösung zweier einfachen Gleichungen

$$ax + by = c$$
$$dx + fy = g$$

noch folgendes Verfahren mittheilen, welches das Combinationsverfahren genannt wird:

Man ziehe den Werth einer Unbekannten, z. B. y aus beiden gegebenen Gleichungen, also $$y = \frac{c - ax}{b}$$

und $$y = \frac{g - dx}{f},$$

und setze diese Werthe einander gleich, so entsteht die Eliminations-Gleichung $$\frac{c - ax}{b} = \frac{g - dx}{f},$$

oder wenn man die Brüche wegschafft

$$cf - afx = bg - bdx$$

oder $$bdx - afx = bg - cf,$$

also $$x = \frac{bg - cf}{bd - af} = \frac{cf - bg}{af - bd}.$$

In ähnlicher Art läßt sich auch y finden, indem man x zwischen den beiden gegebenen Gleichungen eliminirt.

Zur weiteren Uebung fügen wir noch einige Beispiele hinzu, in denen nicht bloß die gesuchten, sondern auch die gegebenen Zahlen in Buchstaben ausgedrückt sind.

21. $$\left\{\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \frac{a + b}{2} \\ y = \frac{a - b}{2} \end{array}$$

22. $$\left\{\begin{array}{l} x : y = m : n \\ x + y = a \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \frac{am}{m + n} \\ x = \frac{an}{m + n} \end{array}$$

23. $$\left\{\begin{array}{l} a - x : y = b : c \\ x - y = d \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \frac{ac + bd}{b + c} \\ y = \frac{(a - d) \cdot c}{b + c} \end{array}$$

24. $$\left\{\begin{array}{l} x - \frac{y}{m} = a \\ y + \frac{x}{n} = b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \frac{n(am + b)}{mn + 1} \\ y = \frac{m(bn - a)}{mn + 1} \end{array}$$

25. $\left\{\begin{array}{l}\frac{x + a}{y + b} = m \\ \frac{x - a}{y - b} = n\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}x = \frac{(m + n)a - 2mnb}{m - n} \\ y = \frac{2a - (m + n)b}{m - n}\end{array}$

26.*) $\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{b}\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}x = \frac{2ab}{a + b} \\ y = \frac{2ab}{b - a}\end{array}$

27. $\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m \\ \frac{c}{x} - \frac{d}{y} = n\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}x = \frac{ad + bc}{bn + dm} \\ y = \frac{ad + bc}{cm - an}\end{array}$

*§. 183. Zusatz.

In den §§. 182, a und b erhielten wir für die Gleichungen

$$ax + by = c$$

und

$$dx + fy = g$$

die Auflösungen

$$x = \frac{cf - bg}{af - bd}$$

und

$$y = \frac{ag - cd}{af - bd}.$$

Wir haben jedoch noch die Frage offen gelassen, ob in allen Fällen oder unter welchen Bedingungen die erhaltenen Auflösungen den gegebenen Gleichungen wirklich Genüge leisten. In dieser Hinsicht stellen sich uns sofort zwei wesentlich zu unterscheidende Fälle vor Augen, je nachdem in den obigen Werthen von x und y der beiden gemeinschaftliche Nenner af — bd gleich Null oder von Null verschieden ist. Daß in dem letzteren Falle diese Werthe den gegebenen Gleichungen wirklich entsprechen, davon überzeugt man sich am einfachsten, wenn man dieselben einsetzt, wodurch die Bestimmungsgleichungen in identische übergehen.

Wenn aber der Nenner $af - bd = 0$ ist, so haben wir wiederum zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Coefficienten a, b, d, f sämmtlich von Null verschieden sind, oder einer derselben gleich Null ist. In diesem letzteren Falle, wenn z. B. $a = 0$ ist, muß, da wir den Nenner $af - bd = 0$ vorausgesetzt haben, entweder b oder d ebenfalls $= 0$ sein.

Sind zunächst in einer Gleichung beide Coefficienten a und b gleich Null, — wo dann auch natürlich $c = 0$ sein muß, wenn die erste gegebene Gleichung sich nicht selbst widersprechen soll, — so fällt diese Gleichung ganz aus, und es bleibt nur eine, nämlich die zweite Gleichung mit zwei Unbekannten übrig**), was offenbar zur Berechnung derselben nicht ausreichen kann. Die allgemeinen Werthe von x und y erhalten dann, wenn $c = 0$ ist, die Form

$$x = \frac{0}{0} \text{ und } y = \frac{0}{0},$$

wenn aber c von Null verschieden sein sollte, die Form

*) Man suche nicht sofort x und y, sondern zunächst $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ zu bestimmen.

**) Wobei natürlich d und f als von Null verschieden gedacht werden; denn sonst bliebe noch weniger übrig.

$$x = \frac{1}{0} \text{ und } y = \frac{1}{0}\text{*)}.$$

Wenn ferner in den beiden gegebenen Gleichungen die Coefficienten a und d derselben Unbekannten x gleich Null sind, so fällt diese Unbekannte in den beiden Gleichungen ganz aus; dieselben sind daher zur Berechnung von zwei Unbekannten überhaupt nicht geeignet. Je nachdem nun $cf = bg$, also in beiden Gleichungen y den nämlichen Werth repräsentirt, oder cf von bg verschieden ist, wo dann aus den beiden Gleichungen verschiedene Werthe für y hervorgehen, also die Gleichungen mit einander in Widerspruch stehen, nehmen die Werthe von x und y im ersteren Falle die Form

$$x = \frac{0}{0} \text{ und } y = \frac{0}{0},$$

im anderen Falle die Form an

$$x = \frac{1}{0} \text{ und } y = \frac{0}{0}\text{**)}.$$

Wenn dagegen die Coefficienten a, b, c, d sämmtlich von Null verschieden sind und der Nenner $af - bd = 0$ ist, so muß sich verhalten

$$a : d = b : f.$$

Nun kann wiederum zweierlei stattfinden, entweder es findet auch zwischen c und g das nämliche Verhältniß statt oder nicht. Im ersteren Falle, also wenn sich verhält $a : d = b : f = c : g$,
nimmt die allgemeine Auflösung, da $ag = cd$ und $bg = cf$ ist, die Form

$$x = \frac{0}{0} \text{ und } y = \frac{0}{0}$$

an, und die eine Gleichung läßt sich aus der andern ableiten, z. B. die zweite aus der ersten, indem man diese mit

$$\frac{d}{a} = \frac{f}{b} = \frac{g}{c}$$

multiplicirt. Die Gleichungen sind also überhaupt nicht von einander verschieden; sie können nicht für zwei, sondern nur für eine Bestimmungsgleichung gelten und folglich auch nicht zur Berechnung von zwei Unbekannten ausreichen.

In dem andern Falle, wo sich verhält

$$a : d = b : f,$$

aber das Verhältniß $c : g$ von diesen gleichen Verhältnissen verschieden ist, gehen die allgemeinen Auflösungen, da in denselben zufolge der Voraussetzung der Zähler von Null verschieden ist, über in

$$x = \frac{1}{0} \text{ und } y = \frac{1}{0},$$

und die beiden gegebenen Gleichungen widersprechen sich. Denn wenn wir die obere mit $\frac{d}{a} = \frac{f}{b}$ multipliciren, so erhalten wir

$$dx + fy = \frac{cd}{a} = \frac{cf}{b}.$$

---

*) Mit $\frac{1}{0}$ bezeichnen wir überhaupt die in der Algebra nach §. 88 unzulässige Form eines Bruches, dessen Nenner gleich Null und dessen Zähler von Null verschieden sein soll.

**) Die Behauptung, welche man wohl in Lehrbüchern findet, daß wenn von den allgemeinen Werthen von x und y der eine die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, das nämliche auch von dem andern gelten müsse, trifft daher nicht in allen Fällen zu.

Weil aber nach der Voraussetzung nicht $\frac{cd}{a}$ oder $\frac{cf}{b} = g$ sein kann, so steht diese Gleichung mit der zweiten gegebenen Gleichung in directem Widerspruche.

Aus den angestellten Untersuchungen geht als Ergebniß hervor: **Zwei einfache Gleichungen mit zwei Unbekannten, welche sich nicht widersprechen, und von denen nicht die eine aus der andern abgeleitet werden kann, genügen allemal zur Bestimmung der beiden Unbekannten.**

Sind z. B. die Gleichungen

$$6x + 8y = 18$$

und

$$9x + 12y = 27$$

gegeben, in denen sich $6 : 9 = 8 : 12 = 18 : 27$

verhält, so verwandeln sich die oben angegebenen allgemeinen Werthe von x und y, wenn man in denselben $a = 6$, $b = 8$, $c = 18$, $d = 9$, $f = 12$ und $g = 27$ setzt, in

$$x = \frac{0}{0} \text{ und } y = \frac{0}{0}.$$

Die beiden Gleichungen sind aber nicht wesentlich von einander verschieden; die eine läßt sich in die andere, z. B. die obere in die untere verwandeln, wenn man dieselbe mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt.

Lauteten die gegebenen Gleichungen

$$6x + 8y = 18$$

und

$$9x + 12y = 30,$$

so würden die allgemeinen Auflösungen übergehen in

$$x = \frac{18 . 12 - 8 . 30}{0} = \frac{-24}{0} = \frac{1}{0}.$$

und

$$y = \frac{6 . 30 - 9 . 18}{0} = \frac{+18}{0} = \frac{1}{0}.$$

Die Gleichungen stehen aber mit einander in Widerspruch; denn wenn man die obere mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, so ergibt sich

$$9x + 12y = 27,$$

während doch zufolge der zweiten Gleichung

$$9x + 12y = 30$$

sein soll.

§. 184, a. Aufgabe.

Drei einfache Gleichungen

$$1)\quad ax + by + cz = d$$
$$2)\quad ex + fy + gz = h$$
$$3)\quad mx + ny + pz = q$$

mit drei Unbekannten x, y, z aufzulösen.

Aufl. Man eliminire eine der Unbekannten z zweimal zwischen irgend zwei der gegebenen Gleichungen, z. B. zwischen den Gleichungen (1) und (2) und zwischen (2) und (3), so erhält man zwei Eliminationsgleichungen, welche nur noch x und y enthalten. Diese Gleichungen seien folgende:

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

und

$$\delta x + \varepsilon y = \varsigma.$$

Aus diesen Gleichungen suche man nun auf die schon bekannte Weise x und y und setze, um z zu erhalten, die gefundenen Werthe von x und y in eine der gegebenen Gleichungen ein.

*§. 184, b. Zusatz.

So wie wir in §. 183, b in Hinsicht der Gleichungen mit zwei Unbekannten gewisse Ausnahmefälle erörtert haben, so können dergleichen natürlich auch bei den Gleichungen mit drei Unbekannten eintreten; wir gehen jedoch hierauf nicht näher ein, um nicht bei einem Gegenstande von geringerer praktischer Wichtigkeit allzu lange zu verweilen. Vorausgesetzt nun, daß keiner dieser Ausnahmefälle stattfindet, daß also bei Ausführung der oben angegebenen Rechnung nirgends ein Nenner verschwindet, so müssen die für x, y und z sich ergebenden Werthe den drei gegebenen Gleichungen Genüge leisten. Da nämlich die Werthe von x, y und z offenbar derjenigen Gleichung, aus welcher z nach Substitution der Werthe von x und y erhalten worden ist, ferner die Werthe von x und y nach §. 183, b den beiden Eliminationsgleichungen Genüge leisten, so müssen die Werthe von x, y und z auch den beiden andern gegebenen Gleichungen genügen, da sich diese aus der vorhin angeführten gegebenen und aus den Eliminationsgleichungen herleiten lassen.

Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen:

$$1.\quad \begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 5x - 4z = -3 \\ 8y - 3z = 3. \end{cases}$$

Da jede dieser Gleichungen nur zwei Unbekannte enthält, so kann man eine jede derselben als Eliminationsgleichung ansehen und hat nur noch nöthig, zwischen den beiden andern Gleichungen die dritte Unbekannte zu eliminiren. Wir wollen hier die erste Gleichung, welche nur x und y enthält, als eine Eliminationsgleichung annehmen und dann z zwischen den beiden anderen Gleichungen nach dem Additionsverfahren eliminiren; wir erhalten so, indem wir die zweite Gleichung mit 3 und die dritte mit 4 multipliciren und in jener die Zeichen umkehren,

$$\begin{array}{r} -15x + 12z = 9 \\ 32y - 12z = 12 \\ \hline -15x + 32y = 21. \end{array}$$

Wenn wir nun diese Gleichung mit der ersten der gegebenen Gleichungen

$$+ 2x + 3y = 19$$

zusammenstellen, so haben wir es nur noch mit zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y zu thun. Wir eliminiren zwischen denselben am bequemsten x, indem wir die erstere Gleichung mit 2, die letztere mit 15 multipliciren und dann beide Gleichungen addiren, also:

$$\begin{array}{r} -30x + 64y = 42 \\ +30x + 45y = 285 \\ \hline 109y = 327, \end{array}$$

folglich $y = 3.$

Setzen wir diesen Werth von y in die erste und dritte der gegebenen Gleichungen ein, so erhalten wir weiter $x = 5$ und $z = 7.$

Es seien ferner folgende Gleichungen aufzulösen:

$$2.\quad \begin{cases} 5x - 8y + 4z = 23 \\ 7x + 2y - 3z = 7 \\ 4x + 3y - 7z = -24. \end{cases}$$

Wir eliminiren hier am bequemsten y und zwar zunächst zwischen der ersten und zweiten Gleichung und dann weiter zwischen der zweiten und dritten Gleichung. Wir multipliciren zu diesem Zwecke die zweite Gleichung mit 4 und addiren die erste, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{array}{r} 28x + 8y - 12z = 28 \\ 5x - 8y + 4z = 23 \\ \hline (1,2)\ 33x \qquad - 8z = 51. \end{array}$$

Hierauf multipliciren wir die zweite Gleichung mit 3 und die dritte mit 2 und kehren in dieser die Zeichen um; dann erhalten wir weiter

$$\begin{array}{rrrrr} & 21x + 6y - 9z & = & 21 \\ & -8x - 6y + 14z & = & +48 \\ \hline (2,3) & 13x \qquad + 5z & = & 69. \end{array}$$

Aus den beiden Eliminationsgleichungen (1,2) und (2,3) schaffen wir am leichtesten z fort, indem wir die Gleichung (1,2) mit 5 und die Gleichung (2,3) mit 8 multipliciren und dann addiren.

$$\begin{array}{rcl} 165x - 40z & = & 255 \\ 104x + 40z & = & 552 \\ \hline 269x & = & 807, \end{array}$$

also

$$x = 3.$$

Setzen wir diesen Werth von x in die eine Eliminationsgleichung, z. B. in die Gleichung (2,3) ein, so erhalten wir weiter

$$z = 6,$$

und wenn wir endlich die gefundenen Werthe von x und z in eine der gegebenen Gleichungen (am bequemsten in die zweite) einsetzen, so ergibt sich

$$y = 2.$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

3. $$\left\{\begin{array}{r} x + 3y = 13 \\ 4x - 8z = 20 \\ 5y + 4z = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$$

4. $$\left\{\begin{array}{r} 4x + y = 7 \\ 2x + 3z = 2 \\ y + 6z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = 5 \\ z = \frac{1}{3} \end{array}$$

5. $$\left\{\begin{array}{r} x + y - 2z = 5 \\ 5x - 5y + 4z = 5 \\ 2 - 3y + 7z = 19 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{array}$$

6. $$\left\{\begin{array}{r} 5x - 4y + z = 17 \\ 4x - 7y + z = -29 \\ -3x + 4y - 2z = -12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 12 \\ z = 15 \end{array}$$

7. $$\left\{\begin{array}{r} 8x - 7y + 4z = 14 \\ 3x - 5y + 2z = -6 \\ -6x + 11y - 3z = 47 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -2 \\ y = +10 \\ z = +25 \end{array}$$

8. $$\left\{\begin{array}{r} x + 2y + 4z = 4 \\ 7x - y + 2z = 14 \\ 3x + 4y - 12z = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{4} \end{array}$$

9. $$\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z = 7 \\ -6x + 11y + 3z = 41 \\ 5x - 6y + 13z = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{array}$$

10. $$\left\{\begin{array}{r} 4x + 2y - 3z = 0 \\ -6x + 10y + 5z = +28 \\ 12x - 7y - 10z = -30 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{array}$$

11. $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + 4z = 7 \\ 3x + 4y - 2z = 3\frac{1}{2} \\ 4x - 2y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}$

12*). $\left\{\begin{array}{l} 15x - 7y + 13z = 40 \\ 8x + 9y - 4z = 14 \\ 12x - 2y - 9z = -19 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}$

13. $\left\{\begin{array}{l} x + y = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{a + b - c}{2} \\ y = \frac{a + c - b}{2} \\ z = \frac{b + c - a}{2} \end{array}$

14**). $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = a \\ x : y = m : n \\ y : z = p : q \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{amp}{mp + np + nq} \\ y = \frac{anp}{mp + np + nq} \\ z = \frac{anq}{mp + np + nq} \end{array}$

15. $\left\{\begin{array}{l} ax + by = m \\ cx + dz = n \\ fy + gz = p \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{bgn + dfm - bdp}{adf + bcg} \\ y = \frac{adp + cgm - agn}{adf + bcg} \\ z = \frac{afn + bcp - cfm}{adf + bcg} \end{array}$

16. $\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = m \\ \frac{a}{x} - \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = n \\ -\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = p \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{2a}{m + n} \\ y = \frac{2b}{m + p} \\ z = \frac{2c}{n + p} \end{array}$

17. $\left\{\begin{array}{l} \frac{xy}{x + y} = a \\ \frac{xz}{x + z} = b \\ \frac{yz}{y + z} = c \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{2abc}{ac + bc - ab} \\ y = \frac{2abc}{ab + bc - ac} \\ z = \frac{2abc}{ab + ac - bc} \end{array}$

§. 185. Zusatz.

Sind vier einfache Gleichungen mit vier Unbekannten x, y, z und u gegeben, so eliminirt man zunächst einen Buchstaben, z. B. u zwischen diesen Gleichungen dreimal, (z. B. zwischen der ersten und zweiten, zwischen der zweiten und dritten und zwischen der dritten und vierten), wodurch man drei

*) Man gelangt bei dieser Aufgabe am raschesten zum Ziele, wenn man zuerst alle drei Gleichungen addirt.

**) Man setze die Werthe von x und z aus der 2. und 3. Gleichung in die erste ein.

Gleichungen mit drei Unbekannten x, y und z bekommt, welche sich aus diesen Gleichungen durch das im vorhergehenden §. angegebene Verfahren finden lassen. Man erhält dann endlich noch die vierte Unbekannte u, indem man die Werthe von x, y und z in eine der ursprünglich gegebenen Gleichungen einsetzt.

Ueberhaupt sieht man leicht, wie n einfache Gleichungen mit n Unbekannten aufgelöst werden.

Wir wollen nun noch einige Aufgaben über einfache Gleichungen mit mehreren Unbekannten hinzufügen, bei welchen man erst aus der Aufgabe die Gleichungen abzuleiten hat.

1) Welche zwei Zahlen geben zur Summe 53 und zur Differenz 19? — Antw. 36 und 17.

2) Welche zwei Zahlen geben zur Summe s und zur Differenz d? — Antw. $\frac{s+d}{2}$ und $\frac{s-d}{2}$.

3) Welche zwei Zahlen geben zur Summe 60 und zum Quotienten $\frac{2}{3}$? — Antw. 24 und 36.

4) Zwei Zahlen geben zur Summe a und zum Quotienten q. Wie heißen diese Zahlen? — Antw. $\frac{a}{q+1}$ und $\frac{aq}{q+1}$.

5) Welche zwei Zahlen geben zur Differenz 3 und zum Quotienten $\frac{4}{3}$? — Antw. 12 und 9.

6) Die Differenz zweier Zahlen ist $= d$ und die größere durch die kleinere dividirt gibt zum Quotienten q. Welche Zahlen sind es?

Antw. $\frac{d}{q-1}$ und $\frac{dq}{q-1}$.

7) Wenn 1 Pfund Kaffee 2 Sgr. mehr, als 1 Pfund Zucker kostet und 3 Pfund Kaffee und 5 Pfund Zucker zusammen mit 2 Thlr. 2 Sgr. bezahlt werden, wie theuer sind ein Pfund Kaffee und ein Pfund Zucker? — Antw. Ein Pfund Kaffee kostet 9 Sgr. und ein Pfund Zucker 7 Sgr.

8) Wenn man für 5 Friedrichsd'or 8 Dukaten und $2^1/_3$ Thlr. und für 8 Friedrichsd'or 12 Dukaten und $6^1/_3$ Thlr. erhält, wie hoch kommen 1 Friedrichsd'or und 1 Dukaten zu stehen? — Antw. Der Friedrichsd'or 5 Thlr. 20 Sgr. und der Dukaten 3 Thlr. $7^1/_2$ Sgr.

9) In einem Wasserbehälter münden zwei Zuleitungsröhren. Als bei einem Versuche die erste Röhre 3 Stunden und die andere 2 Stunden geöffnet war, erhielt man 98 Kubikfuß, und als bei einem andern Versuche die erste Röhre $2^1/_2$ Stunde und die andere 3 Stunden geöffnet war, erhielt man 111 Kubikfuß. Wie viel gab jede Röhre einzeln in der Stunde? — Antw. Die erste 18 und die zweite 22 Kubikfuß.

10) Es wird ein Bruch von folgender Beschaffenheit gesucht. Wenn man zum Zähler und Nenner 1 addirt, so wird derselbe $= \frac{1}{2}$, und wenn man vom Zähler und Nenner 3 subtrahirt, so wird derselbe $= \frac{1}{3}$. Wie heißt der Bruch? — Antw. $\frac{7}{15}$.

11) Wenn man vom Zähler und Nenner eines Bruches 1 subtrahirt, so wird derselbe $= \frac{2}{3}$, und wenn man zum Zähler und Nenner 3 addirt, so wird derselbe $= \frac{3}{4}$. Wie heißt der Bruch? — Antw. $\frac{9}{13}$.

12) Eine Geräthschaft, welche aus Kupfer und Eisen besteht, wiegt 100 Pfd. und verliert im Wasser 12 Pfd. Wenn nun 9 Pfd. Kupfer 1 Pfd. und 8 Pfd. Eisen ebenfalls 1 Pfd. an Gewicht im Wasser verlieren, aus wie viel Pfd. Kupfer und Eisen ist die Geräthschaft zusammengesetzt? — Antw. Aus 64 Pfd. Eisen und 36 Pfd. Kupfer.

13) Eine silberne Dose mit goldenen Verzierungen wiegt 6 Loth und verliert im Wasser $\frac{1}{2}$ Loth an Gewicht. 39 Loth Gold verlieren im Wasser 2 Loth, und 21 Loth Silber verlieren im Wasser ebenfalls 2 Loth. Wie viel enthält hiernach die Dose von jedem Metall? — Antw. $1\frac{5}{8}$ Loth Gold und $4\frac{3}{8}$ Loth Silber.

14) Ein Körper, welcher aus zwei Stoffen A und B zusammengesetzt ist, wiegt p Pfd. und verliert im Wasser π Pfd.; ferner verlieren a Pfd. von A im Wasser α Pfd. und b Pfd. von B im Wasser β Pfd. Wie viel Pfd. von jedem Stoffe sind in dem Körper enthalten? — Antw. $\frac{a(b\pi - p\beta)}{b\alpha - a\beta}$ von A und $\frac{b(a\pi - p\alpha)}{a\beta - b\alpha}$ von B.

D. Von den quadratischen Gleichungen.

§. 186. Erklärung.

An einer geordneten quadratischen Gleichung unterscheiden wir drei Glieder, ein Glied mit x^2, ein Glied mit x und ein Glied ohne x. Das Schema einer geordneten quadratischen Gleichung ist daher folgendes:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Bringen wir das Glied ohne x auf die andere Seite und dividiren dann die ganze Gleichung durch a, so verwandelt sich dieselbe in

$$x^2 + \frac{b}{a} . x = - \frac{c}{a}.$$

Da a, b und c gegebene Ausdrücke vorstellen, so sind auch die Quotienten

$$\frac{b}{a} \text{ und } \frac{c}{a}$$

als bekannt anzusehen. Setzen wir daher, um abzukürzen,

$$\frac{b}{a} = p \text{ und } - \frac{c}{a} = q,$$

so erhalten wir folgendes einfachere Schema für quadratische Gleichungen überhaupt:

$$x^2 + px = q,$$

wo p und q sowohl positiv, als auch negativ oder gleich Null sein können. Ist im besonderen Falle p = 0, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$x^2 = q.$$

Eine solche quadratische Gleichung, in welcher das Glied mit x fehlt, und die also nur aus zwei Gliedern besteht, einem Gliede mit x^2 und einem Gliede ohne x, heißt eine rein quadratische. Eine geordnete quadratische Gleichung, in welcher auch das Glied mit x vorhanden ist, wird eine unrein quadratische Gleichung genannt.

§. 187. Aufgabe.

Die rein quadratische Gleichung

$$x^2 = q$$

aufzulösen.

Aufl. Wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel ausziehen, so erhalten wir, da nach §. 135, 2 jede Quadratwurzel sowohl einer positiven als auch einer negativen Zahl gleich sein kann, entweder

$$x = + \sqrt{q} \text{ oder } x = - \sqrt{q}.$$

Gewöhnlich faßt man diese beiden Angaben in die eine

$$x = \pm \sqrt{q}$$

zusammen.

§. 188. Zusatz.

Wenn q positiv ist, so hat die Gleichung

$$x^2 = q$$

zufolge des vorhergehenden §. zwei reelle Resultate; ist z. B. die Gleichung

$$x^2 = 16$$

gegeben, so sind die Resultate derselben

$$x = +4 \text{ oder } x = -4.$$

Ist q = 0, heißt also die gegebene Gleichung $x^2 = 0$, so fallen beide Resultate in das eine x = 0 zusammen. Ist aber q negativ, heißt z. B. die gegebene Gleichung $x^2 = -9$, so hat x keinen reellen Werth, d. h. es gibt weder eine positive noch eine negative Zahl, welche statt x gesetzt dieser Gleichung Genüge leisten könnte; die Unbekannte x ist also in diesem Falle imaginär.

Zur Uebung können folgende Beispiele dienen:

1)	$x^2 = 144;$	$x = \pm 12$
2)	$3x^2 = 75;$	$x = \pm 5$
3)	$\frac{x^2}{5} = 20;$	$x = \pm 10$
4)	$\frac{2}{3}x^2 = 24;$	$x = \pm 6$
5)	$x^2 = 7;$	$x = \pm 2{,}645\ldots$
6)	$x^2 = 50;$	$x = \pm 7{,}071\ldots$
7)	$ax^2 = b;$	$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$
8)	$\frac{m}{n}x^2 = c^2;$	$x = \pm c\sqrt{\frac{n}{m}}$
9)	$mx^2 + nx^2 = a^2p;$	$x = \pm a\sqrt{\frac{p}{m+n}}$
10)	$5 : x = x : 45;$	$x = \pm 15$
11)	$5 - x : 4 = 4 : 5 + x;$	$x = \pm 3$
12)	$a : b + x = b - x : c;$	$x = \pm \sqrt{b^2 - ac}$
13)	$x^2 = -4;$	$x = \pm \sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}$
14)	$x^2 = -18;$	$x = \pm \sqrt{-18} = \pm 3\sqrt{-2}$
15)	$x^2 + a^2 = 0;$	$x = \pm a\sqrt{-1}.$

Ueber die imaginären Quadratwurzeln bemerken wir noch Folgendes: Bedeutet p eine positive Zahl, so folgt aus der Gleichung

$$\sqrt{-p} = \sqrt{p}\,.\,\sqrt{-1},$$

daß die imaginäre Wurzel aus einer negativen Zahl sich allemal durch ein Product ersetzen läßt, welches zum einen Factor die (rationale oder irrationale) Wurzel aus einer positiven Zahl, zum andern Factor $\sqrt{-1}$ hat. — Weiter erkennt man auch leicht die Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1 \qquad (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4 = +1 \qquad (\sqrt{-1})^5 = +\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^6 = -1 \qquad (\sqrt{-1})^7 = -\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^8 = +1 \qquad (\sqrt{-1})^9 = +\sqrt{-1} \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet überhaupt n eine positive ganze Zahl, so ist allgemein

$$(\sqrt{-1})^{4n} = +1 \qquad (\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1 \qquad (\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}.$$

Zur ferneren Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $\sqrt{-2}\,.\,\sqrt{-3} = \pm\sqrt{6}$ 2) $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}} = \pm 2$

3) $(2+\sqrt{-3})\,.\,(4-\sqrt{-5}) = 8-\sqrt{15}+4\sqrt{-3}-2\sqrt{-5}$

4) $(6-\sqrt{-2})\,.\,(5-\sqrt{-2}) = 28-11\sqrt{-2}$

5) $(3+\sqrt{-5})\,.\,(3-\sqrt{-5}) = 14$

6) $(4+\sqrt{-3})^2 = 13+8\sqrt{-3}$

7) $(1+\sqrt{-3})^3 = -8$

8) $(a+b\sqrt{-1})^2 = a^2-b^2-2ab\sqrt{-1}$

9) $(a+b\sqrt{-1})\,.\,(a-b\sqrt{-1}) = a^2+b^2$*)

10) $\dfrac{1}{1+\sqrt{-1}} = \dfrac{1-\sqrt{-1}}{2}$

11) $\dfrac{\sqrt{-3}+\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}-\sqrt{-2}} = 5-2\sqrt{-6}$

12) $\dfrac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} = \dfrac{a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$

13) $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}} = \sqrt{2a+\sqrt{(a^2+b^2)}}$

Die Richtigkeit der letzten Gleichung wird dargethan, wenn man beide Seiten ins Quadrat erhebt.

Bemerkung.

Ehe wir zur Auflösung der unrein quadratischen Gleichung

$$x^2 + px = q$$

übergehen, schicken wir noch Folgendes voraus. Um aus der vorstehenden Gleichung x zu erhalten, müssen wir das Quadrat von x wegschaffen; dieses kann, so wie bei der rein quadratischen Gleichung, offenbar nicht anders, als durch Ausziehen der Quadratwurzel bewerkstelligt werden. Nun läßt sich aber bekanntlich aus einem zweigliedrigen Ausdrucke $x^2 + px$ die Quadratwurzel nicht ausziehen. Wir stellen daher zunächst die folgende Aufgabe auf.

§. 189. Aufgabe.

Den zweigliederigen Ausdruck

$$x^2 + px$$

durch Hinzufügung eines dritten Gliedes zum Quadrate zu vervollständigen.

Aufl. Nach §. 137 ist

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Wenn uns daher die Aufgabe gestellt wäre, den zweigliederigen Ausdruck

$$a^2 + 2ab$$

zum Quadrate zu vervollständigen, so würden wir auf der Stelle erkennen, daß das hinzuzufügende dritte Glied gleich $+ b^2$ ist. Nun verwandelt sich aber der Ausdruck $a^2 + 2ab$

*) Bekanntlich ist $a^2 - b^2 = (a+b)\,.\,(a-b)$; mit Zuziehung imaginärer Ausdrücke läßt sich zufolge der obigen Gleichung auch $a^2 + b^2$ in ein Produkt zerfällen.

in den gegebenen Ausdruck $x^2 + px$,

wenn wir $a = x$ und $2b = p$, also $b = \frac{1}{2}p$

annehmen, woraus sich das hinzuzufügende dritte Glied

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{1}{4}p^2$$

ergibt. Wir erhalten so den zum Quadrate vervollständigten Ausdruck

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2,$$

aus welchem die Quadratwurzel gleich

$$x + \frac{1}{2}p$$

ist; denn wenn wir diesen Ausdruck ins Quadrat erheben, so bekommen wir

$$\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}p \cdot x + \left(\frac{1}{2}p\right)^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2.$$

Hieraus ergibt sich folgende Regel: Um den zweigliederigen Ausdruck $x^2 + px$ zum Quadrate zu vervollständigen, müssen wir zu demselben ein drittes Glied $\frac{1}{4}p^2$ hinzufügen, welches wir erhalten, indem wir die Hälfte des Coefficienten von x ins Quadrat erheben.

Wir wollen die so eben entwickelte Regel noch an einigen Beispielen erläutern. Es sei zunächst

$$1)\quad x^2 + 8x$$

zum Quadrat zu vervollständigen und dann die Wurzel auszuziehen. Der Factor von x ist 8, die Hälfte 4 und das Quadrat hiervon 16. Durch Hinzufügung dieses Gliedes verwandelt sich der gegebene Ausdruck in

$$x^2 + 8x + 16,$$

woraus die Wurzel $= x + 4$ ist. Denn wenn wir $x + 4$ ins Quadrat erheben, so erhalten wir $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$.

Es sei weiter

$$2)\quad x^2 - 7x$$

gegeben, so ist das hinzuzufügende Glied

$$\left(-\frac{7}{2}\right)^2 = +\frac{49}{4}$$

und also der vervollständigte Ausdruck

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2.$$

Ist ferner noch

$$3)\quad x^2 + \frac{3}{4}x$$

gegeben, so ist das hinzuzufügende Glied $\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$ und folglich der zum Quadrate ergänzte Ausdruck

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = \left(x + \frac{3}{8}\right)^2.$$

Zur weiteren Uebung können die folgenden Beispiele dienen, bei welchen wir diesmal die Auflösungen zweckmäßiger weglassen.

4) $x^2 + 12x$ 5) $x^2 - 20x$
6) $x^2 - 3x$ 7) $x^2 + 5x$

8) $x^2 + \frac{2}{3}x$ 9) $x^2 + \frac{3}{2}x$

10) $x^2 - \frac{4}{3}x$ 11) $x^2 + \frac{7}{5}x$.

§. 190. Aufgabe.

Die unrein quadratische Gleichung

$$x^2 + px = q$$

nach x aufzulösen.

Aufl. Wir vervollständigen zuerst nach §. 189 das Quadrat, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{1}{4}p^2$ addiren; dann erhalten wir

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2.$$

Hierauf ziehen wir die Quadratwurzel aus, so ergibt sich

$$x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2},$$

folglich

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}.$$

§. 191. Zusatz.

1) Die unrein quadratische Gleichung $x^2 + px = q$ hat also im allgemeinen zwei Wurzeln:

$$x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} \text{ und } x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}.$$

Dieselben sind entweder beide reell, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen $q + \frac{1}{4}p^2$ positiv ist; oder sie sind beide imaginär, wenn dieser Ausdruck negativ ist; oder endlich sie fallen beide in die eine Wurzel $x = -\frac{1}{2}p$ zusammen, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen = Null ist.

2) Wenn in der Gleichung

$$x^2 + px = q$$

im besonderen Falle $q = 0$ ist, so verwandelt sich dieselbe in

$$x^2 + px = 0;$$

lösen wir diese Gleichung nach dem Verfahren des §. 190 auf, so erhalten wir

1) $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2} = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p = 0$

und 2) $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2} = -\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p = -p$.

Zu diesen beiden Resultaten könnten wir jedoch auch auf einem weit kürzeren Wege gelangen, wenn wir die gegebene Gleichung so schrieben:

$$x \,.\, (x + p) = 0;$$

denn nun fällt uns auf der Stelle in die Augen, daß dieser Gleichung sowohl durch die Annahme $x = 0$, als auch durch die Annahme $x = -p$ genügt wird, da ein Product allemal verschwindet, wenn einer seiner Faktoren gleich Null ist.

I.

Wir wollen das im §. 190 entwickelte allgemeine Verfahren zunächst auf folgendes Beispiel anwenden: $x^2 - 12x = -20$.

Um das Quadrat zu vervollständigen, addiren wir auf beiden Seiten $(-6)^2 = +36$ und erhalten

$$x^2 - 12x + 36 = -20 + 36$$

oder

$$x^2 - 12x + 36 = +16.$$

Ziehen wir nun die Quadratwurzel aus, so finden wir

$$x - 6 = \pm 4,$$

und wenn wir transponiren, $x = 6 \pm 4;$

das heißt: entweder $x = 10$ oder $x = 2$.

Setzen wir in der gegebenen Gleichung $x = 10$, so verwandelt sich dieselbe in

$$100 - 120 = -20;$$

und wenn wir in der gegebenen Gleichung $x = 2$ setzen, so geht dieselbe über in

$$4 - 24 = -20.$$

Beide erhaltenen Werthe von x leisten also der gegebenen Gleichung Genüge.

Weiter wollen wir noch zwei vollständig ausgerechnete Beispiele hersetzen.

2)
$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= 10 \\ + \frac{9}{4} &= + \frac{9}{4} \\ \hline x^2 + 3x + \frac{9}{4} &= + \frac{49}{4} \\ x + \frac{3}{2} &= \pm \frac{7}{2} \\ x &= -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} \end{aligned}$$

also $x = +2$ oder -5.

3)
$$\begin{aligned} x^2 + \frac{5}{6}x &= -\frac{1}{6} & \Big|\ 144: -24 \\ + \frac{25}{144} &= + \frac{25}{144} & \Big|\ +25 \\ \hline x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{25}{144} &= + \frac{1}{144} \\ x + \frac{5}{12} &= \pm \frac{1}{12} \\ x &= -\frac{5}{12} \pm \frac{1}{12} \\ x &= -\frac{1}{3} \text{ oder } -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

4) $x^2 - 10x = -21$; $x = +3$ oder $+7$
5) $x^2 - 6x = -5$; $x = +1$ oder $+5$
6) $x^2 - 14x = -24$; $x = +2$ oder $+12$
7) $x^2 - 6x = +27$; $x = +9$ oder -3
8) $x^2 - 4x = +96$; $x = +12$ oder -8
9) $x^2 - 18x = +40$; $x = +20$ oder -2
10) $x^2 + 6x = +7$; $x = +1$ oder -7
11) $x^2 + 10x = -25$; $x = -5$
12) $x^2 + 12x = -32$; $x = -4$ oder -8
13) $x^2 + 18x = -72$; $x = -6$ oder -12
14) $x^2 - 5x = -6$; $x = +2$ oder $+3$
15) $x^2 - 9x = -18$; $x = +3$ oder $+6$
16) $x^2 + 7x = +30$; $x = +3$ oder -10
17) $x^2 + x = +6$; $x = +2$ oder -3
18) $x^2 + \frac{3}{2}x = +10$; $x = +\frac{5}{2}$ oder -4
19) $x^2 - \frac{1}{4}x = +\frac{3}{4}$; $x = +1$ oder $-\frac{3}{4}$
20) $x^2 + \frac{2}{3}x = +\frac{8}{9}$; $x = +\frac{2}{3}$ oder $-\frac{4}{3}$

21) $x^2 - x = +8\frac{3}{4}$; $x = +\frac{7}{2}$ oder $-\frac{5}{2}$

22) $x^2 + \frac{21}{10}x = +1$; $x = +\frac{2}{5}$ oder $-\frac{5}{2}$

23) $x^2 - \frac{17}{12}x = -\frac{1}{2}$; $x = +\frac{2}{3}$ oder $= +\frac{3}{4}$

24) $x^2 - 3x = -\frac{9}{4}$; $x = +\frac{3}{2}$

25) $x^2 - 4x = 0$; $x - 0$ oder $= +4$.

II.

Im Vorhergehenden haben wir nur solche quadratische Gleichungen in Betracht gezogen, bei denen sich die Quadratwurzel wirklich ausziehen läßt, und die daher rationale Resultate haben. Dies findet jedoch eigentlich nur in den selteneren Fällen statt; bei weitem die meisten quadratischen Gleichungen haben irrationale Resultate, für welche wir nur Näherungswerthe anzugeben im Stande sind, so in dem folgenden Beispiele, für welches wir zugleich die Ausrechnung beifügen.

26) $$\begin{aligned} x^2 - 8x &= -11 \\ +16 &= +16 \\ \hline x^2 - 8x + 16 &= +5 \\ x - 4 &= \pm\sqrt{5} = \pm 2,23606\ldots \\ x &= 4 \pm 2,23606\ldots \end{aligned}$$

also entweder $x = 6,23606\ldots$ oder $= 1,76393\ldots$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

27) $x^2 - 24x = -4$; $x = +23,832\ldots$ oder $+0,167\ldots$
28) $x^2 - 4x = +18$; $x = +6,690\ldots$ oder $-2,690\ldots$
29) $x^2 - 32x = +304$; $x = +39,664\ldots$ oder $-7,664\ldots$
30) $x^2 + 8x = 7$; $x = +0,795\ldots$ oder $-8,795\ldots$
31) $x^2 + 30x = -72$; $x = -2,630\ldots$ oder $-27,369\ldots$
32) $x^2 + 10x = -23$; $x = -3,585\ldots$ oder $-6,414\ldots$
33) $x^2 - 5x = +7$; $x = +6,140\ldots$ oder $-1,140\ldots$

III.

Die bisher behandelten unrein quadratischen Gleichungen hatten sämmtlich reelle Wurzeln; diese können jedoch auch beide imaginär sein, d. h. es gibt gar keine positive oder negative Zahl oder Null, welche statt x gesetzt der Gleichung Genüge leistete; so in den folgenden Beispielen:

34) $x^2 - 6x = -10$; $x = 3 \pm \sqrt{-1}$
35) $x^2 + 8x = -22$; $x = -4 \pm \sqrt{-6}$
*35) $x^2 - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{8}$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{4}$

IV.

So wie wir im Vorhergehenden quadratische Gleichungen in bestimmten Zahlen aufgelöst haben, ganz eben so werden auch quadratische Gleichungen in Buchstaben behandelt, wie die folgenden Beispiele zeigen.

36)
$$\begin{aligned} x^2 - ax &= 6a^2 \\ + \frac{1}{4}a^2 &= + \frac{1}{4}a^2 \\ \hline x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 &= \frac{25}{4}a^2 \\ x - \frac{1}{2}a &= \pm \frac{5}{2}a \\ x = \frac{1}{2}a &\pm \frac{5}{2}a \\ x = +3a \text{ oder } &- 2a \end{aligned}$$

37)
$$\begin{aligned} x^2 + 2ax &= b^2 \\ + a^2 &= + a^2 \\ \hline x^2 + 2ax + a^2 &= a^2 + b^2 \\ x + a &= \pm \sqrt{a^2 + b^2} \\ x &= - a \pm \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise sind die folgenden Exempel zu rechnen.

38) $x^2 - 8ax = - 12a^2$; $x = + 6a$ oder $+ 2a$

39) $x^2 + 10ax = + 24a^2$; $x = + 2a$ oder $- 12a$

40) $x^2 - 3ax = 10a^2$; $x = + 5a$ oder $- 2a$

41) $x^2 + 4ax = - a^2$; $x = - 2a \pm \sqrt{3a^2} = a(- 2 \pm \sqrt{3})$

*41) $x^2 + 6ax = - 12a^2$; $x = a(- 3 \pm \sqrt{- 3})$

42) $x^2 - 5ax = \frac{3}{2}a^2$; $x = + \frac{5}{2}a \pm \sqrt{\frac{31}{4}a^2} = \frac{a(5 \pm \sqrt{31})}{2}$

43) $x^2 - ax = a^2$; $x = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$

44) $x^2 + \frac{1}{3}ax = \frac{3}{4}a^2$; $x = \frac{a(- 1 \pm \sqrt{28})}{6}$

*44) $x^2 - \frac{2}{5}ax = - \frac{2}{5}a^2$; $x = \frac{a(1 \pm 3\sqrt{- 1})}{5}$

45) $x^2 - ax = \frac{3b^2 - a^2}{2}$; $x = \frac{a \pm \sqrt{6b^2 - a^2}}{2}$

46) $x^2 - 4ax = 9b^2$; $x = 2a \pm \sqrt{4a^2 + 9b^2}$

47) $x^2 - 2bx = a^2 + 2ab$; $x = a + 2b$ oder $- a$

48) $x^2 + 6bx = a^2 - 6ab$; $x = - a$ oder $a - 6b$

49) $x^2 - 8ax = 9b^2 - 24ab$; $x = + 8a - 3b$ oder $+ 3b$

50) $x^2 + ax = 0$; $x = 0$ oder $- a$.

V.

In der folgenden Gleichung

51) $ax^2 + bx = c$

haben wir zuerst den Factor von x^2 wegzuschaffen; wir dividiren daher die ganze Gleichung durch a, und wenn wir dann auf gewöhnliche Art weiter rechnen, so erhalten wir

$$\begin{array}{rcl|l} & & & 4a^2 \\ x^2 + \frac{b}{a}x &=& \frac{c}{a} & + 4ac \\ + \frac{b^2}{4a^2} &=& \frac{b^2}{4a^2} & + b^2 \\ \hline x^2 = \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &=& \multicolumn{2}{l}{\frac{+ 4ac + b^2}{4a^2}} \\ x + \frac{b}{2a} &=& \multicolumn{2}{l}{\pm \frac{\sqrt{4ac + b^2}}{2a}} \\ x &=& \multicolumn{2}{l}{\frac{- b \pm \sqrt{4ac + b^2}}{2a}} \end{array}$$

In ähnlicher Art sind die folgenden Beispiele zu behandeln.

52) $3ax^2 - 5bx = 4ac;\ x = \frac{5b \pm \sqrt{48a^2c + 25b^2}}{6a}$

53) $2ax^2 + 3bcx = -5d^2;\ x = \frac{-3bc \pm \sqrt{9b^2c^2 - 40ad^2}}{4a}$

54) $4ax^2 - b^2x = c^2d;\ x = \frac{b^2 \pm \sqrt{16ac^2d + b^4}}{8a}$

55) $ax^2 - bdx = b^2c;\ x = \frac{b(d \pm \sqrt{4ac + d^2})}{2a}$

56) $5ax^2 + 3bcx = -2b^3;\ x = \frac{b(-3c \pm \sqrt{9c^2 - 40ab})}{10a}$

57) $a^2x^2 - 16ab^2x = -15b^4;\ x = \frac{b^2}{a}$ oder $\frac{15b^2}{a}$

58) $10a^2x^2 - 7abcx = 12b^2c^2;\ x = +\frac{3bc}{2a}$ oder $\frac{4bc}{5a}$

59) $8a^2x^2 + 5abx = 0;\ x = 0$ oder $-\frac{5b}{8a}$.

VI.

Da die folgende Gleichung

60) $x^2 - 4ax - 6bx = -9b^2$

zwei Glieder mit dem Factor x enthält, so ziehen wir diese beiden Glieder zunächst in ein Glied zusammen und rechnen dann weiter, wie folgt.

$$\begin{aligned} x^2 - (4a + 6b)x &= -9b^2 \\ + (2a + 3b)^2 &= 4a^2 + 12ab + 9b^2 \\ x^2 - (4a + 6b)x + (2a + 3b)^2 &= 4a^2 + 12ab \\ \hline x - (2a + 3b) &= \pm\sqrt{4a^2 + 12ab} \\ x &= 2a + 3b \pm \sqrt{4a^2 + 12ab}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Art sind die folgenden Beispiele zu behandeln.

61) $x^2 - 2ax + 6bx = +6ab;\ x = a - 3b \pm \sqrt{a^2 + 9b^2}$

62) $x^2 - 10ax - 2bx = 5a^2 - b^2;\ x = 5a + b \pm \sqrt{30a^2 + 10ab}$

63) $x^2 + 2ax + 2bx = -4ab;\ x = -2a$ oder $-2b$

64) $x^2 + 8ax - 10bx = +80ab;\ x = -8a$ oder $+10b$

65) $x^2 - ax + bx = +ab;\ x = +a$ oder $-b$

66) $3ax^2 - 5bx + 4cx = 0;\ x = 0$ oder $= \frac{5b - 4c}{3a}$

67) $2ax^2 - 3ax + 4bx = 3b;\ x = \frac{3a - 4b \pm \sqrt{9a^2 + 16b^2}}{4a}$

68) $ax^2 - (a - b)x = b;\ x = +1$ oder $-\frac{b}{a}$

69) $(a - b)x^2 - 2bx = b;\ x = \frac{b \pm \sqrt{ab}}{a - b}$.

VII.

Die vorhergehenden Gleichungen waren sämmtlich schon geordnet; die folgenden Gleichungen hat man vorher durch Wegschaffen der Brüche u. s. w. auf die in §. 190 angegebene Form zu bringen.

70) $\frac{2x}{2x - c} = \frac{ab}{x - c}$; $x = \frac{ab + c \pm \sqrt{a^2b^2 + c^2}}{2}$

71) $\frac{b}{x} = \frac{x - a - b}{x + 3a - b}$; $x = \frac{a + 2b \pm \sqrt{a^2 + 16ab}}{2}$

72) $\frac{4x - 4bd}{ac} + 1 = \frac{x - 2bd}{x + ac}$; $x = bd - \frac{1}{2}ac$ oder $-\frac{1}{2}ac$.

VIII.

Für die mit der Trigonometrie vertrauten Leser fügen wir Folgendes hinzu: Wenn in einer unrein quadratischen Gleichung

$$x^2 \pm px = \pm q$$

p und q, welche hier absolute Zahlen bezeichnen sollen, in vielziffrigen Zahlen oder statt derselben ihre Logarithmen gegeben sind, so kann man bei der Auflösung durch Benutzung logarithmisch-trigonometrischer Zahlen an Bequemlichkeit der Rechnung gewinnen. — Ist zunächst die Gleichung

$$\text{I.} \quad x^2 - px = -q$$

gegeben, so ist

$$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} = \frac{1}{2}p\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{q}{(\frac{1}{2}p)^2}}\right).$$

Je nachdem nun $\frac{1}{4}p^2 < q$ oder $\frac{1}{4}p^2 = q$ oder $\frac{1}{4}p^2 > q$ ist, hat x entweder zwei imaginäre Werthe oder nur den einen reellen Werth $\frac{1}{2}p$ oder zwei reelle Werthe. In dem letztern Falle, welcher uns hier allein beschäftigen kann, suche man einen spitzen Winkel φ nach der Gleichung

$$1) \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{q}}{\frac{1}{2}p},$$

wo $\sqrt{q}$ ihren positiven Werth repräsentiren soll; so geht der oben angegebene Werth von x, da $\frac{1}{2}p = \sqrt{q} : \sin\varphi$ ist, über in

$$x = \sqrt{q} \cdot \frac{(1 \pm \cos\varphi)}{\sin\varphi},$$

also vermöge einer bekannten trigonometrischen Umformung*) entweder

$$2) \quad x = \sqrt{q} \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\varphi \text{ oder } x = \sqrt{q} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi.$$

Hat man also W. φ nach Gleichung (1) berechnet, so ergeben die Gleichungen (2) und (3) die gesuchten Werthe von x. — Wenn ferner die Gleichung

$$\text{II.} \quad x^2 - px = +q$$

gegeben ist, so ist

$$3) \quad x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} = \frac{1}{2}p\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{q}{\frac{1}{4}p^2}}\right).$$

---

*) Anfangsgründe der Trigonometrie §. 29, a und b.

Sucht man hier einen Winkel φ nach der Gleichung

$$4)\quad \text{tang}\,\varphi = \frac{\sqrt{q}}{\frac{1}{2}p},$$

so verwandelt sich die zuletzt erhaltene Gleichung in

$$x = \frac{1}{2}p\left(1 \pm \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \sqrt{q}\,.\,\text{cotg}\,\varphi\left(1 \pm \frac{1}{\cos\varphi}\right)$$
$$= \sqrt{q}\,.\left(\frac{\cos\varphi \pm 1}{\sin\varphi}\right) = \pm\sqrt{q}\,.\left(\frac{1 \pm \cos\varphi}{\sin\varphi}\right),$$

also entweder

$$5)\quad x = +\sqrt{q}\,.\,\text{cotg}\,\frac{1}{2}\varphi \quad \text{oder} \quad 6)\quad x = -\sqrt{q}\,.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi.$$

Ist W. φ nach Gleichung (4) gefunden, so liefern die Gleichungen (5) und (6) die gesuchten Auflösungen. — Wenn endlich die Gleichungen

$$\text{III.}\quad x^2 + px = -q$$

und

$$\text{IV.}\quad x^2 + px = +q$$

gegeben sein sollten, so hat man nur nöthig, um die Auflösungen derselben auf die der Gleichungen (I.) und (II.) zurückzuführen, $x = -x'$ zu setzen. Die auf die angegebene Art erhaltenen Werthe von x' sind, wenn man ihre Vorzeichen umkehrt, die gesuchten Werthe von x.

§. 192. Lehrsatz.

In jeder quadratischen Gleichung von der Form

$$x^2 + ax + b = 0$$

ist die Summe der Wurzeln gleich dem mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Coefficienten des zweiten Gliedes und das Product der Wurzeln gleich dem dritten Gliede. Sind also α und β die Wurzeln der obigen Gleichung, so ist

$$\alpha + \beta = -a \text{ und } \alpha\,.\,\beta = +b.$$

Bew. Wenn wir die Gleichung

$$x^2 + ax = -b$$

auf gewöhnliche Weise auflösen, so erhalten wir entweder

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} = \alpha$$

oder

$$x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} = \beta.$$

Addiren wir diese Resultate, so ergibt sich auf der Stelle

$$\alpha + \beta = -a.$$

Multipliciren wir dieselben mit einander, so erhalten wir

$$\begin{array}{l} +\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a\,.\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} \\ \qquad\quad + \frac{1}{2}a\,.\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} - \left(\frac{1}{4}a^2 - b\right) \\ \hline +\frac{1}{4}a^2 \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{4}a^2 + b, \end{array}$$

also

$$\alpha\,.\,\beta = +b.$$

So hat z. B. die Gleichung

$$x^2 - 14x + 40 = 0$$

die Wurzeln $x = +4$ und $+10$, und es ist die Summe dieser Wurzeln $= +14$ und das Product $= +40$.

Ferner ist in der Gleichung

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

entweder $x = -7$ oder $+4$, und es ist $-7 + 4 = -3$ und $(-7) . (+4) = -28$.

§. 193, a. Lehrsatz.

Wenn α und β die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

bezeichnen, so ist

$$(x - \alpha) . (x - \beta) = x^2 + ax + b.$$

Bew. Denn wenn man das Product

$$(x - \alpha) . (x - \beta)$$

entwickelt, so erhält man

$$x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta$$

oder

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta.$$

Nach dem vorhergehenden §. ist aber $\alpha + \beta = -a$, also $-(\alpha + \beta) = +a$, und $\alpha . \beta = +b$. Hiernach verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck in $x^2 + ax + b$ w. z. b. w.

So hatte z. B. die Gleichung

$$x^2 - 14x + 40 = 0$$

die Wurzeln $+4$ und $+10$; multiplicirt man nun $x - 4$ mit $x - 10$, so erhält man

$$(x - 4) . (x - 10) = x^2 - 14x + 40.$$

§. 193, b. Zusatz.

Wenn in der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

$b = \frac{1}{4}a^2$ ist, so fallen die beiden Wurzeln derselben

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$$

und

$$x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$$

in die eine

$$x = -\frac{1}{2}a$$

zusammen; und die Gleichung selbst verwandelt sich in

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = 0,$$

wofür wir auch setzen können

$$\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 = 0.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung ein Product aus zwei gleichen Factoren ist, so pflegt man auch zu sagen, die Gleichung habe zwei gleiche Wurzeln.

§. 194, a. Zusatz.

Man kann den vorhergehenden Satz benutzen, um ein Trinomium von der Form $x^2 + ax + b$

in ein Product von der Form

$$(x - \alpha) . (x - \beta)$$

zu verwandeln. Ist z. B. das Trinomium

$$x^2 - 8x + 15$$

gegeben, so bilden wir die quadratische Gleichung

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

und suchen die Wurzeln derselben, als welche wir 3 und 5 finden. Dann ist

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3) . (x - 5).$$

Es ergibt sich hieraus auch der sehr klare Grund, warum die quadratische Gleichung im allgemeinen zwei Auflösungen hat. Denn wenn wir z. B. die Gleichung $x^2 - 8x + 15 = 0$ in folgender Art $(x - 3) . (x - 5) = 0$ schreiben, so fällt sogleich in die Augen, daß derselben sowohl durch die Annahme $x = 3$, als auch durch die Annahme $x = 5$ Genüge geschieht, indem ein Product verschwindet, wenn ein Factor desselben gleich Null wird.

Zur Uebung können noch folgende Beispiele dienen:

1) $x^2 + 9x + 14 = (x + 2) . (x + 7)$
2) $x^2 + 6x - 16 = (x + 8) . (x - 2)$
3) $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{2}\right) . \left(x - \frac{2}{3}\right)$
4) $3x^2 - 14x + 8 = (3x - 2) . (x - 4)$
5) $4x^2 + 9x + 2 = (4x + 1) . (x + 2)$
6) $9x^2 - 6x - 8 = (3x + 2) . (3x - 4)$
7) $10x^2 + 11x - 6 = (2x + 3) . (5x - 2)$
8) $2x^2 - 7ax + 6a^2 = (x - 2a) . (2x - 3a)$.

Die beiden vorhergehenden Sätze §. 192—194 sind übrigens nur specielle Fälle zweier allgemeinen Sätze, welche von höheren Gleichungen überhaupt gelten. (Vergl. Algebraische Analysis. Essen, 1869. Cap. II, §. 20, 4.)

*§. 194, b. Zusatz.

Wenn in der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

b positiv und $> \frac{1}{4}a^2$ ist, so wird

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$$

imaginär. Es läßt sich leicht zeigen, daß unter der angegebenen Voraussetzung $\left(b > \frac{1}{4}a^2\right)$ das Trinomium

$$x^2 + ax + b$$

für jeden reellen Werth von x einer positiven Zahl gleich wird und also nicht, wie die obige Gleichung es verlangt, verschwinden kann. Denn setzen wir $b = \frac{1}{4}a^2 + p$, wo p irgend eine positive Zahl bedeutet, so ist

$$x^2 + ax + b = x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 + p = \left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 + p.$$

Da nun $\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2$ niemals negativ werden kann und p zufolge der Voraussetzung positiv ist, so ist folglich auch das Trinomium $x^2 + ax + b$ jedenfalls positiv.

§. 195. Zusatz.

Die Auflösung der folgenden Gleichung vom vierten Grade

$$x^4 + fx^2 = g$$

läßt sich leicht auf die einer Gleichung vom zweiten Grade zurückführen.

Setzt man nämlich $x^2 = z,$
also $x^4 = z^2,$
so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$z^2 + fz = g,$$

woraus sich ergibt

$$x^2 = z = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + g},$$

folglich

$$x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2}f \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}f^2 + g}}.$$

Die gegebene Gleichung vom vierten Grade hat also vier verschiedene Wurzeln.

In ähnlicher Art wie die obige Gleichung können überhaupt Gleichungen von der Form $x^{2n} + fx^n = g$ behandelt werden.

Zur Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $x^4 - 13x^2 = -36;\ x = \pm 2$ oder ± 3
2) $x^4 - 6x^2 = -5;\ x = \pm 1$ oder $\pm \sqrt{5}$
3) $x^4 + 3x^2 = 28;\ x = \pm 2$ oder $\pm \sqrt{-7}$
4) $x^6 + 5x^3 = 24;\ x = -2$ oder $\sqrt[3]{3}$.

Die letzte Gleichung hat außer den angezeigten reellen Wurzeln noch vier imaginäre Wurzeln.

§. 196. Zusatz.

Wenn in einer Gleichung ein Wurzelausdruck vorkommt, so kann man denselben dadurch wegschaffen, daß man alle andern Glieder auf die entgegengesetzte Seite bringt und die ganze Gleichung mit dem Wurzelexponenten potenzirt. Ist z. B. die Gleichung

$$a + \sqrt{bx} = cx$$

gegeben, so erhalten wir zunächst durch Transponiren

$$\sqrt{bx} = cx - a$$

und dann weiter, wenn wir quadriren,

$$bx = c^2x^2 - 2acx + a^2,$$

und wenn wir transponiren und die Zeichen umkehren,

$$c^2x^2 - 2acx - bx = -a^2$$

oder

$$x^2 - \frac{(2ac + b)x}{c^2} = -\frac{a^2}{c^2},$$

folglich

$$x = \frac{2ac + b \pm \sqrt{4abc + b^2}}{2c^2}$$

In ähnlicher Art können aus einer Gleichung auch zwei oder drei Quadratwurzeln weggeschafft werden. Auf eine größere Zahl von Quadratwurzeln leidet jedoch das angegebene Verfahren keine Anwendung mehr.

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $x + \sqrt{(2x + 3)} = 6;\ x = 3$ oder 11.

(Der erste Werth von $x = 3$ paßt für die gegebene Gleichung, wenn man dem Wurzelausdrucke $\sqrt{(2x + 3)}$ seinen positiven Werth beilegt; der andere Werth $x = 11$ thut der gegebenen Gleichung Genüge, wenn man für den Wurzelausdruck $\sqrt{(2x + 3)}$ seinen negativen Werth setzt. Aehnliches gilt bei den folgenden Beispielen. (Vergleiche auch unten §. 202.)

2) $2x - \sqrt{(5x - 1)} = 1;\ x = 2$ oder $1/4$.
3) $x = 10 + 2\sqrt{(x + 5)};\ x = 4$ oder 20.

4) $\sqrt{3x + 1} + 3\sqrt{x} = 5$; $x = 1$ oder 16.

5) $\sqrt{x + 7} = 1 + \sqrt{2x}$; $x = 2$ oder 18.

§. 197. Aufgabe.

Zwei Gleichungen zwischen zwei Unbekannten x und y aufzulösen, wenn die eine Gleichung vom ersten, die andere vom zweiten Grade ist.

Aufl. Man ziehe aus der einfachen Gleichung den Werth der einen Unbekannten, z. B. den Werth von y und setze denselben in die andere Gleichung ein, so erhält man eine quadratische Gleichung, welche nur noch x enthält. Hierauf löse man diese Gleichung auf, so ergeben sich zwei Werthe von x. Setzt man nun diese Werthe nach einander in die einfache Gleichung ein, so erhält man zu jedem der beiden gefundenen Werthe von x den zugehörigen Werth von y.

I.

Zur Erläuterung des eben Gesagten mögen folgende Beispiele dienen:

$$1)\quad \begin{cases} x + 2y = 10 \\ x \,.\, y = 12. \end{cases}$$

Wir ziehen hier aus der ersten Gleichung am bequemsten

$$x = 10 - 2y;$$

setzen wir diesen Werth in die zweite Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$(10 - 2y) \,.\, y = 12,$$

oder wenn wir die Klammern auflösen, dann die Zeichen umkehren und in gewöhnlicher Art weiter rechnen,

$$10y - 2y^2 = 12$$

$$+ 2y^2 - 10y = -12$$

$$y^2 - 5y = -6$$

$$y = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

also $\qquad y = +3$ oder $+2$.

Setzen wir nun den ersten Werth $y = 3$ in die Gleichung $x = 10 - 2y$ ein, so finden wir $\qquad x = 10 - 6 = 4;$

setzen wir aber den andern Werth $y = 2$ ein, so erhalten wir

$$x = 10 - 4 = 6.$$

Demnach lassen die beiden gegebenen Gleichungen zwei Auflösungen zu; es ist nämlich entweder $\qquad$ I. $x = 4$ und $y = 3$,

oder es ist $\qquad$ II. $x = 6$ und $y = 2$.

Es seien ferner gegeben die Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = b. \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$y = b - x;$$

setzen wir diesen Werth in die erste ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$x^2 + (b - x)^2 = a^2,$$

oder wenn wir die Klammern auflösen,

$$x^2 + b^2 - 2bx + x^2 = a^2.$$

Ordnen wir nun die Gleichung und rechnen auf gewöhnliche Weise weiter, so erhalten wir $\qquad 2x^2 - 2bx = a^2 - b^2$

$$x^2 - bx = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

$$x = \frac{b \pm \sqrt{2a^2 - b^2}}{2},$$

folglich $$y = b - x = \frac{b \mp \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

Die Auflösungen der beiden obigen Gleichungen sind hiernach folgende:

$$\text{I.}\quad x = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \text{ und } y = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}$$

$$\text{II.}\quad x = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \text{ und } y = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

3) $\left\{\begin{array}{l} x + y = 12 \\ x \,.\, y = 32 \end{array}\right\}$ I. $x = 8, y = 4$; II. $x = 4, y = 8$

4) $\left\{\begin{array}{l} x - y = 3 \\ xy + 7y = 24 \end{array}\right\}$ I. $x = 5, y = 2$; II. $x = -9, y = -12$

5) $\left\{\begin{array}{l} x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 53 \end{array}\right\}$ I. $x = 7, y = 2$; II. $x = -2, y = -7$

6) $\left\{\begin{array}{l} x + y = 9 \\ x^2 + y^2 + 6x = 65 \end{array}\right\}$ I. $x = 4, y = 5$; II. $x = 2, y = 7$

7) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{array}\right\}$ I. $x = 2, y = 3$; II. $x = 1\frac{1}{5}, y = 3\frac{2}{5}$

8) $\left\{\begin{array}{l} y - 3x = 5 \\ y^2 - 8x^2 - 6y = 8 \end{array}\right\}$ I. $x = 1, y = 8$; II. $x = -13, y = -34$

9) $\left\{\begin{array}{l} 3y - 2x = -3 \\ xy - 5x = -12 \end{array}\right\}$ I. $x = 6, y = 3$; II. $x = 3, y = 1$

10) $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 11 \\ xy - 7y + 3x = 3 \end{array}\right\}$ I. $x = 10, y = -9$; II. $x = 4, y = 3$

11) $\left\{\begin{array}{l} x + y = 9 \\ x^2 - y^2 = 45 \end{array}\right\}$ $x = 7, y = 2$

12) $\left\{\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{array}\right\}$ $x = 1, y = 1$

13) $\left\{\begin{array}{l} x + y = a \\ x \,.\, y = b \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} \\ y = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} \end{array}\right.$

14) $\left\{\begin{array}{l} x - y = a \\ x^2 + y^2 = b^2 \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2} \\ y = \frac{-a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2} \end{array}\right.$

15) $\left\{\begin{array}{l} x : y = m : n \\ x^2 - y^2 = a^2 \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pm am}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} \\ y = \frac{\pm an}{\sqrt{(m^2 - n^2)}} \end{array}\right.$

$$16)\ \left\{\begin{array}{l} x - y = a \\ x^3 - y^3 = b \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}} \\ y = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}} \end{array}\right.$$

Endlich wollen wir noch die folgende Aufgabe, bei welcher beide gegebene Gleichungen vom zweiten Grade sind, hersetzen.

$$17)\ \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = a \\ x \,.\, y = b \end{array}\right\}$$

Zieht man hier aus der unteren Gleichung den Werth der einen Unbekannten und setzt denselben in die andere Gleichung ein, so erhält man eine Gleichung vom 4ten Grade, welche sich jedoch nach §. 195 auflösen läßt. Man gelangt so zu folgenden Resultaten:

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}\right)}$$

$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}\right)}.$$

Die gegebenen Gleichungen $x^2 + y^2 = a$
und $xy = b$
lassen sich jedoch auch in folgender Art auflösen: Wenn man die zweite der gegebenen Gleichungen mit 2 multiplicirt, hierauf erstens zu der ersten Gleichung addirt und zweitens von derselben subtrahirt und beidemal die Quadratwurzel auszieht, so ergibt sich $x + y$ und $x - y$, woraus man dann leicht folgende Werthe erhält:

$$x = \frac{\pm \sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}}{2}$$

$$y = \frac{\pm \sqrt{a + 2b} \mp \sqrt{a - 2b}}{2}$$

Von der Gleichheit dieser und der vorher erhaltenen Werthe von x und y überzeugt man sich, wenn man die zuletzt erhaltenen Resultate ins Quadrat erhebt.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch bemerken, daß, wenn man zwischen zwei quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten eine Unbekannte eliminirt, die Eliminationsgleichung im allgemeinen vom vierten Grade ist. Wir sind daher nur diejenigen Aufgaben mit zwei Unbekannten (in der Elementarmathematik) in allen Fällen zu lösen im Stande, bei welcher entweder beide Gleichungen vom ersten Grade sind, oder die eine vom ersten und die andere vom zweiten Grade ist. Die Auflösung gelingt nur ausnahmsweise, wie in dem 17. Beispiele, wenn beide gegebene Gleichungen quadratisch sind.

II.

Wir wollen nun auch einige Beispiele über quadratische Gleichungen beifügen, bei denen man erst aus den Aufgaben die Gleichungen abzuleiten hat. Wir setzen hier aus der Geometrie folgende zwei Sätze als bekannt voraus:

a) Der Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man die Länge mit der Breite multiplicirt.

b) In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Catheten.

1) Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich 54 Quadratfuß und die Länge ist 1½ mal so groß als die Breite. Welches ist die Größe dieser Linien? — Antw. Die Länge ist gleich 9 und die Breite 6 Fuß.

2) Ist überhaupt der Inhalt eines Rechtecks $= a^2$, und verhält sich die Länge x zur Breite y wie $m : n$, so ist

$$x = a \cdot \sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{am}{\sqrt{(mn)}} \text{ und } y = a \cdot \sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{an}{\sqrt{(mn)}}.$$

3) Wie groß sind die Länge und Breite eines Rechtecks, wenn der Unterschied dieser Linien 10 Fuß und der Inhalt des Rechtecks 96 Quadratfuß beträgt? — Antw. Die Länge ist gleich 16 und die Breite 6 Fuß.

4) Ist überhaupt der Inhalt eines Rechtecks $= a^2$ und der Unterschied zwischen der Länge x und der Breite y gleich d, so ist

$$x = \frac{1}{2}d + \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}d^2} \text{ und } y = -\frac{1}{2}d + \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}d^2}.$$

5) Ein Quadrat, welches 6 Zoll Seite und also 24 Zoll Umfang hat, soll in ein Rechteck von 30 Zoll Umfang verwandelt werden; wie groß sind die Länge und Breite dieses Rechtecks? — Antw. Die Länge ist gleich 12 und die Breite 3 Zoll.

6) Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks mißt 15 Zoll, und die Catheten verhalten sich wie $3 : 4$; wie groß sind diese beiden Linien? — Antw. 9 und 12 Zoll.

7) Verhalten sich überhaupt die Catheten x und y eines rechtwinkeligen Dreiecks wie $m : n$ und ist die Hypotenuse $= h$, so ist

$$x = \frac{hm}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} \text{ und } y = \frac{hn}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}.$$

8) Wie groß sind die Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die Summe derselben $= 17$ und die Hypotenuse $= 13$ Zoll ist? — Antw. Die größte Cathete ist $= 12$ und die kleinere 5 Zoll.

9) Ist überhaupt die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks $= h$ und die Summe der Catheten $= f$, so ist, wenn wir die größere Cathete mit x und die kleinere mit y bezeichnen,

$$x = \frac{f + \sqrt{2h^2 - f^2}}{2} \text{ und } y = \frac{f - \sqrt{2h^2 - f^2}}{2}.$$

10) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Cathete gleich 8 Zoll und der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der anderen Cathete gleich 2 Zoll; wie groß sind diese beiden Linien? — Antw. Die Hypotenuse ist gleich 17 und die Cathete 15 Zoll.

11) Ist überhaupt die eine Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks gleich a und der Unterschied zwischen der Hypotenuse x und der andern Cathete y gleich d, so ist

$$x = \frac{a^2 + d^2}{2d} \text{ und } y = \frac{a^2 - d^2}{2d}.$$

12) Der Inhalt eines Rechtecks ist $= a^2$ und der Unterschied zwischen der Länge und der doppelten Breite, $x - 2y = b$; dann ist

$$x = \frac{b + \sqrt{8a^2 + b^2}}{2} \text{ und } y = \frac{-b + \sqrt{8a^2 + b^2}}{4}.$$

13) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse gleich a und die Summe aus der einen Cathete und dem Doppelten der andern Cathete, $x + 2y = b$; dann ist

$$x = \frac{b \pm 2\sqrt{5a^2 - b^2}}{5} \text{ und } y = \frac{2b \mp \sqrt{5a^2 - b^2}}{5}.$$

14) Die beiden Seiten a und b eines Rechtecks sollen um ein gleiches Stück x so verlängert werden, daß der Inhalt des Rechtecks $= c^2$ wird.

Aufl. $x = \frac{-a - b + \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2}$ *).

15) Die eine Seite a eines Rechtecks soll um ein gesuchtes Stück x verlängert, die andere b um eben so viel verkürzt werden, daß der Inhalt des Rechtecks ungeändert bleibt.

Aufl. $x = b - a$.

16) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der Unterschied zwischen der Hypotenuse z und der größeren Cathete x gleich a und der Unterschied zwischen der größeren Cathete x und der kleineren Cathete y gleich b; dann ist

$$x = a + b + \sqrt{2a(a+b)},\ y = a + \sqrt{2a(a+b)}\ ^{*)},$$
$$z = 2a + b + \sqrt{2a(a+b)}.$$

Andere hierher gehörige Beispiele enthalten die Uebungsaufgaben zum vierzehnten Abschnitt des zweiten Theils: Planimetrie. — Für geübtere Leser fügen wir noch Folgendes hinzu:

III.

Wenn man die Summe zweier Wurzeln $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ ins Quadrat erhebt, so erhält man $$(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 8 + 2\sqrt{15}.$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt umgekehrt

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Es fragt sich nun, wie man, wenn das Quadrat $8 + 2\sqrt{15}$ gegeben ist, die Wurzel $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ findet. — Um diese Aufgabe zu lösen, setzen wir

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Erheben wir diese Gleichung ins Quadrat, so erhalten wir

$$8 + 2\sqrt{15} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

Nun sieht man leicht ein, daß wenn die Wurzel aus $8 + 2\sqrt{15}$ in der aufgestellten Form existiren soll, die Summe der rationalen Glieder

$$x + y = 8$$

und das irrationale Glied $$2\sqrt{xy} = 2\sqrt{15}$$

sein muß. Erheben wir die letztere Gleichung ins Quadrat, so erhalten wir

$$1)\quad xy = 15,$$

und wenn wir hiermit die vorhergehende Gleichung

$$2)\quad x + y = 8$$

verbinden und diese Gleichungen auf bekannte Weise auflösen, so ergibt sich entweder

$$x = 5 \text{ und } y = 3$$

oder $$x = 3 \text{ und } y = 5.$$

Da sich hiernach die Werthe von x und y vertauschen lassen, so ist

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Soll überhaupt die Wurzel aus einem zweigliederigen Ausdrucke von der Form

$$a + \sqrt{b},$$

wo das eine Glied rational, das andere irrational ist, gezogen werden, so setzen wir

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Quadriren wir, so erhalten wir

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy},$$

woraus wir nach der im Vorhergehenden angegebenen Ueberlegung die beiden Gleichungen

$$1)\quad x + y = a$$

und $$2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$$

*) Vor der Wurzel kann in der 14. und 16. Aufgabe nicht das Zeichen (—) stehn, weil sonst in jener der Werth von x, in dieser der Werth von y negativ würde.

oder
$$2)\quad xy = \frac{1}{4}b^2$$
bilden. Lösen wir diese Gleichungen auf gewöhnliche Weise auf, so ergibt sich
$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2} \text{ und } y = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

Demnach ist
$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}\right)}$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}\right)}.$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
2) $\sqrt{14 + 8\sqrt{3}} = \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$
3) $\sqrt{12 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{10} - \sqrt{2}$
4) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$
5) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$
6) $\sqrt{73 + 12\sqrt{35}} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}$
7) $\sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}$
8) $\sqrt{b^2 - 2a\sqrt{b^2 - a^2}} = a - \sqrt{b^2 - a^2}.$

IV.

Wir wollen ferner einige Beispiele hinzufügen, bei welchen ein von dem gewöhnlichen abweichendes Verfahren, die Anwendung des einen oder andern Kunstgriffs, zum Ziele führt. Ehe wir hierzu übergehen, zeigen wir noch vorher, wie einige der im Vorhergehenden bereits gelösten Gleichungen mit zwei Unbekannten sich statt der gewöhnlichen Substitutionsmethode auch auf andere Weise sehr bequem lösen lassen. Wir wählen hierfür zunächst die Aufgabe I, 13
$$x + y = a$$
$$xy = b.$$
Da die Summe von $x + y$ gegeben ist, so suchen wir die Differenz $x - y$ zu erhalten. Zu dem Zwecke erheben wir die obere Gleichung ins Quadrat und subtrahiren hiervon die mit 4 multiplicirte untere, also:
$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2$$
$$-4xy \quad = -4b$$
$$\overline{x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b.}$$
Ziehen wir die Wurzel aus, so bekommen wir
$$x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4b}.$$
Es war
$$x + y = a.$$
Addiren und subtrahiren wir diese Gleichungen, so ergibt sich
$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$
und
$$y = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

In Aufgabe I, 14 sind die Gleichungen
$$x - y = a$$
und
$$x^2 + y^2 = b^2$$

aufzulösen. Da hier die Differenz $x - y$ gegeben ist, so suchen wir die Summe $x + y$ zu erhalten; wir multipliciren zu diesem Zwecke die genannte Gleichung mit 2 und erheben die erste Gleichung ins Quadrat, also:

$$2x^2 + 2y^2 = 2b^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2.$$

Subtrahiren wir nun die untere Gleichung von der obern, so erhalten wir

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2b^2 - a^2,$$

folglich wenn wir die Quadratwurzel ausziehen,

$$x + y = \pm \sqrt{2b^2 - a^2}.$$

Es war
$$x - y = a;$$

demnach ist
$$x = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$$

und
$$y = \frac{a \mp \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}.$$

In der Aufgabe I, 16 waren die Gleichungen

$$x - y = a$$

und
$$x^3 - y^3 = b$$

gegeben. Erheben wir die erste derselben in die 3. Potenz, so bekommen wir

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = a^3,$$

und wenn wir diese Gleichung von der zweiten gegebenen Gleichung subtrahiren,

$$3x^2y - 3xy^2 = b - a^3$$

oder
$$3xy(x - y) = b - a^3,$$

also
$$xy = \frac{b - a^3}{3a},$$

da ja
$$x - y = a$$

gegeben ist. Wir können diese Gleichungen leicht nach dem gewöhnlichen Substitutionsverfahren oder auf die Art auflösen, daß wir $x + y$ suchen. Wir ziehen das letztere vor, erheben zu dem angegebenen Zwecke die untere Gleichung ins Quadrat und addiren hierzu die mit 4 multiplicirte obere, also:

$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2$$
$$+ 4xy \quad = \frac{4b - 4a^3}{3a}$$
$$\overline{x^2 + 2xy + y^2 = \frac{4b - a^3}{3a},}$$

folglich
$$x + y = \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{3a}}.$$

Es war
$$x - y = a;$$

demnach ist
$$x = +\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}}$$

und
$$y = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}}.$$

Wir wollen nun weiter einige Aufgaben, die im Vorhergehenden noch nicht behandelt sind, mit Benutzung des einen oder andern Kunstgriffs lösen.

$$1. \begin{cases} x^2 + xy = a \\ y^2 + xy = b. \end{cases}$$

Addiren wir diese Gleichungen, so bekommen wir

$$x^2 + y^2 + 2xy = a + b,$$

also
$$x + y = \pm \sqrt{a + b}.$$

Vermöge der ersten gegebenen Gleichung ist

$$x(x+y) = a, \text{ folglich } x = \frac{a}{x+y} = \frac{\pm a}{\sqrt{(a+b)}}.$$

Eben so erhalten wir aus der zweiten Gleichung

$$y = \frac{\pm b}{\sqrt{(a+b)}}.$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = a \\ x^2 - y^2 + x - y = b. \end{cases}$$

Addiren und subtrahiren wir diese Gleichungen, so bekommen wir einmal

$$2x^2 + 2x = a + b$$

und das anderemal $2y^2 + 2y = a - b$

und hieraus $x = \frac{-1 \pm \sqrt{2a + 2b + 1}}{2}$

und $y = \frac{-1 \pm \sqrt{2a - 2b + 1}}{2}$.

Diese Aufgabe hat folglich vier Auflösungen, da jeder Werth von x mit jedem Werthe von y verbunden den gegebenen Gleichungen Genüge leistet.

$$3. \begin{cases} (x + y + a)^2 + (x - y + a)^2 = b^2 \\ x^2 - y^2 = c^2. \end{cases}$$

Lösen wir in der ersten Gleichung die Klammern auf, so erhalten wir nach einiger Reduction

$$x^2 + y^2 + 2ax = \frac{b^2 - 2a^2}{2}$$

Addiren wir hierzu die zweite Gleichung, so ergibt sich

$$2x^2 + 2ax = \frac{b^2 + 2c^2 - 2a^2}{2}$$

und hieraus $x = \frac{-a \pm \sqrt{b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$.

Aus der zweiten Gleichung folgt dann weiter

$$y = \pm\sqrt{x^2 - c^2} = \frac{\pm\sqrt{(b^2 + 2c^2 \mp 2a\sqrt{b^2 + 2c^2 - a^2})}}{2}.$$

Die Aufgabe hat also ebenfalls vier Auflösungen, nämlich, wenn wir der Kürze wegen $\sqrt{b^2 + 2c^2 - a^2} = v$ setzen:

$$\text{I.} \quad x = \frac{-a + v}{2}, \ y = \frac{+\sqrt{(b^2 + 2c^2 - 2av)}}{2}$$

$$\text{II.} \quad x = \frac{-a + v}{2}, \ y = \frac{-\sqrt{(b^2 + 2c^2 - 2av)}}{2}$$

$$\text{III.} \quad x = \frac{-a - v}{2}, \ y = \frac{+\sqrt{(b^2 + 2c^2 + 2av)}}{2}$$

$$\text{IV.} \quad x = \frac{-a - v}{2}, \ y = \frac{-\sqrt{(b^2 + 2c^2 + 2av)}}{2}.$$

$$4. \begin{cases} a(x + y) = xy \\ a(x + y) + x^2 + y^2 = c^2. \end{cases}$$

Wir suchen fürs erste nicht die Unbekannten x und y selbst, sondern ihre Summe und Differenz und setzen der Kürze wegen

$$x + y = f \text{ und } x - y = d.$$

Dann ist $x = \frac{f + d}{2}$ und $y = \frac{f - d}{2}$,

ferner $$x^2 + y^2 = \frac{f^2 + d^2}{2} \text{ und } xy = \frac{f^2 - d^2}{4}.$$

Setzen wir diese Werthe in die gegebenen Gleichungen ein, so verwandeln sich dieselben in
$$af = \frac{f^2 - d^2}{4} \text{ oder } f^2 - d^2 = 4af$$

und $$af + \frac{f^2 + d^2}{2} = c^2 \text{ oder } f^2 + d^2 = 2c^2 - 2af,$$

also wenn wir addiren, $$2f^2 = 2c^2 - 2af$$

oder $$f^2 - af = c^2,$$

folglich $$f = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4c^2}}{2}.$$

Ist auf diese Art f gefunden, so bekommen wir d, indem wir die nämlichen Gleichungen, welche wir so eben addirt haben, von einander subtrahiren; wir erhalten so
$$2d^2 = 2c^2 - 6af \text{ oder } d^2 = c^2 - 3af,$$
also, wenn wir den für f erhaltenen Werth einsetzen,
$$d^2 = \frac{2c^2 - 3a^2 \mp 3a\sqrt{a^2 + 4c^2}}{2}$$

und folglich $$d = \frac{\pm \sqrt{(4c^2 - 6a^2 \mp 6a\sqrt{a^2 + 4c^2})}}{2}.$$

Sind aber f und d gefunden, so ist, wie schon oben angegeben,
$$x = \frac{f + d}{2} \text{ und } y = \frac{f - d}{2}.$$

Diese Aufgabe hat, eben so wie die vorhergehende, vier Auflösungen.

$$5. \begin{cases} x + y = a \\ x^4 + y^4 = b^4 \end{cases}$$

Es sei wiederum $x - y = d$; dann ist vermöge der ersten Gleichung
$$x = \frac{a + d}{2} \text{ und } y = \frac{a - d}{2}.$$

Setzen wir diese Werthe in die zweite Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe nach einiger Reduction in $d^4 + 6a^2d^2 = 8b^4 - a^4$,

woraus sich $$d = \pm \sqrt{-3a^2 \pm 2\sqrt{(2a^4 + 2b^4)}}$$

ergibt. Ist aber d gefunden, so sind auch $x = \frac{a + d}{2}$ und $y = \frac{a - d}{2}$ bekannt.

$$6. \begin{cases} (x - y) \cdot (x^2 - y^2) = a \\ (x + y) \cdot (x^2 + y^2) = b. \end{cases}$$

Man setze $$x + y = f \text{ und } x - y = d;$$

dann ist $$x^2 - y^2 = df \text{ und } x^2 + y^2 = \frac{f^2 + d^2}{2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe verwandeln sich die gegebenen Gleichungen in
$$d^2f = a \text{ und } f^3 + d^2f = 2b,$$

also $$f^3 = 2b - a \text{ und } f = \sqrt[3]{(2b - a)},$$

ferner $$d^2 = \frac{a}{f} = \frac{a}{\sqrt[3]{(2b - a)}}$$

und folglich $$d = \frac{\pm \sqrt{a}}{\sqrt[6]{(2b - a)}}.$$

Demnach ist
$$x = \frac{f + d}{2} = \frac{\pm\sqrt{(2b - a)} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b - a)}}$$
und
$$y = \frac{f - d}{2} = \frac{\pm\sqrt{(2b - a)} \mp \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b - a)}}.$$

$$7. \quad \begin{cases} (x + y)xy = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = b. \end{cases}$$

Wenn man in der zweiten Gleichung die Brüche wegschafft, so verwandelt sich dieselbe in
$$x + y = bxy.$$
Man suche nun statt der Unbekannten x und y selbst ihre Summe und ihr Product und setze dem zufolge $x + y = f$ und $xy = p$.
Dann verwandeln sich, wenn man diese Werthe einsetzt, die obigen Gleichungen in
$$fp = a \text{ und } f = bp.$$
Setzt man aus der zweiten dieser Gleichungen den Werth von f in die erste ein, so erhält man
$$bp^2 = a, \text{ also } p = \sqrt{\frac{a}{b}}$$
und dann weiter
$$f = b\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{ab}.$$
Sind aber auf diese Art
$$xy = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ und } x + y = \sqrt{ab}$$
gefunden, so lassen sich auch die Unbekannten x und y aus diesen beiden Gleichungen leicht herleiten.

$$8. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = a \\ (x^2 + y^2) \cdot (x - y) = b. \end{cases}$$

Man suche hier zunächst $x^2 + y^2$ und $x - y$ zu erhalten und setze demgemäß
$$x^2 + y^2 = p \text{ und } x - y = q;$$
dann verwandeln sich die gegebenen Gleichungen in
$$p + q = a$$
und
$$pq = b,$$
woraus sich
$$p = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{ und } q = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$
ergibt. Sind aber auf diese Art
$$x^2 + y^2 = p$$
und
$$x - y = q$$
gefunden, so erhält man hieraus leicht weiter x und y.

$$9. \quad \begin{cases} x + y = a \\ (x^2 + y^2) \cdot (x^3 + y^3) = b \end{cases}$$

Man setze
$$x - y = d;$$
dann ist
$$x = \frac{a + d}{2} \text{ und } y = \frac{a - d}{2}$$
folglich
$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + d^2}{2}$$
und
$$x^3 + y^3 = \frac{a^3 + 3ad^2}{4}.$$
Durch Substitution dieser Werthe verwandelt sich die zweite gegebene Gleichung nach einiger Reduction in

$$d^4 + \frac{4a^2d^2}{3} = \frac{8b - a^5}{3a},$$

woraus
$$d = \pm \sqrt{\frac{-2a^3 \pm \sqrt{(a^6 + 24ab)}}{3a}}$$
hervorgeht. Da $x + y = a$ gegeben ist, so ist nun auch
$$x = \frac{a+d}{2} \text{ und } y = \frac{a-d}{2} \text{ bekannt.}$$

V.

Wenn drei Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben sind und eine oder mehrere dieser Gleichungen quadratisch sind, so reicht im allgemeinen das in §. 184 für einfache Gleichungen angegebene Eliminationsverfahren nicht aus. In vielen (aber nicht allen) Fällen führt das folgende Verfahren zum Ziele: Man behandle eine der drei Unbekannten so, als wenn sie gegeben wäre, suche aus zwei der gegebenen Gleichungen die beiden anderen Unbekannten und setze die erhaltenen Werthe derselben in die dritte gegebene Gleichung ein; so bekommt man eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten. — Von der zweckmäßigen Wahl der Unbekannten, welche man wie gegeben behandelt, und der beiden Gleichungen, aus denen man die Werthe der beiden anderen Unbekannten ableitet, hängt die Bequemlichkeit der Rechnung ab. — Zur Erläuterung wird das folgende einfache Beispiel dienen:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x : y = m : n \\ y : z = n : p. \end{cases}$$

Man behandle y in der zweiten und dritten Gleichung wie gegeben; dann erhält man aus diesen Gleichungen
$$x = \frac{my}{n} \text{ und } z = \frac{py}{n}.$$

Setzt man diese Werthe in die erste Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in
$$\frac{m^2y^2}{n^2} + y^2 + \frac{p^2y^2}{n^2} = a^2,$$
woraus man leicht weiter findet
$$y = \frac{\pm an}{\sqrt{(m^2 + n^2 + p^2)}},\ x = \frac{\pm am}{\sqrt{(m^2 + n^2 + p^2)}},\ z = \frac{\pm ap}{\sqrt{(m^2 + n^2 + p^2)}}.$$

Zur weiteren Uebung fügen wir noch folgende Beispiele hinzu:

$$2) \begin{cases} x : y = m : n \\ x : z = m : p \\ xy + xz + yz = a^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pm am}{\sqrt{(mn + mp + np)}} \\ y = \dfrac{\pm an}{\sqrt{(mn + mp + np)}} \\ z = \dfrac{\pm ap}{\sqrt{(mn + mp + np)}} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x : y : z = m : n : p \\ xyz = a^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{am}{\sqrt[3]{(mnp)}},\ y = \dfrac{an}{\sqrt[3]{(mnp)}} \\ z = \dfrac{ap}{\sqrt[3]{(mnp)}} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \\ y^2 + z^2 = c^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{\left(\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)} \\ y = \sqrt{\left(\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2}\right)} \\ z = \sqrt{\left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\right)} \end{cases}$$

5) $\left\{\begin{aligned} x - y &= a \\ y - z &= b \\ xy + xz + yz &= ab \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \frac{2a + b \pm \sqrt{a^2 + 4ab + b^2}}{3} \\ y &= \frac{-a + b \pm \sqrt{a^2 + 4ab + b^2}}{3} \\ z &= \frac{-a - 2b \pm \sqrt{a^2 + 4ab + b^2}}{3} \end{aligned}$

6) $\left\{\begin{aligned} xy &= a^2 \\ xz &= b^2 \\ yz &= c^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \pm \frac{ab}{c} \\ y &= \pm \frac{ac}{b} \\ z &= \pm \frac{bc}{a} \end{aligned}$

7) $\left\{\begin{aligned} xy + xz &= 18 \\ xy + yz &= 24 \\ xz + yz &= 30 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \pm 2 \\ y &= \pm 3 \\ z &= \pm 6 \end{aligned}$ (Diese Aufgabe läßt sich leicht auf die vorhergehende zurückzuführen.)

8) $\left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{2a^2 - b^2}{3} \\ x + z &= b \\ y + z &= c \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \frac{2b - c \pm \sqrt{2(a^2 - b^2 - c^2)}}{3} \\ y &= \frac{-b + 2c \pm \sqrt{2(a^2 - b^2 - c^2)}}{3} \\ z &= \frac{b + c \mp \sqrt{2(a^2 - b^2 - c^2)}}{3} \end{aligned}$

9) $\left\{\begin{aligned} \frac{xyz}{x + y} &= 8 \\ \frac{xyz}{x + z} &= 6 \\ \frac{xyz}{y + z} &= 4\frac{4}{5} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \pm 2 \\ y &= \pm 4 \\ z &= \pm 6 \end{aligned}$ (Man dividire zunächst je zwei Gleichungen durch einander.)

10) $\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ x(y + z) &= 27 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 50 \end{aligned}\right\}$

I. $x = 3,\ y = 4,\ z = 5$

II. $x = 3,\ y = 5,\ z = 4$

III. $x = 9,\ y = \frac{3 + \sqrt{-71}}{2},\ z = \frac{3 - \sqrt{-71}}{2}$

IV. $x = 9,\ y = \frac{3 - \sqrt{-71}}{2},\ z = \frac{3 + \sqrt{-71}}{2}$.

VI.

Als weitere Anwendung des Vorhergehenden wollen wir noch einige aus der Geometrie entlehnte Beispiele anreihen.

1) Von einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse = c und die zu derselben senkrechte Höhe = h gegeben; es sollen hieraus die Catheten berechnet werden.

Aufl. Bezeichnen wir die größere Cathete mit x, die kleinere mit y, so erhalten wir aus den leicht aufzufindenden Gleichungen

$$x^2 + y^2 = c^2$$

und

$$xy = bc.$$

$$x = \frac{\sqrt{c^2 + 2ch} + \sqrt{c^2 - 2ch}}{2} \text{ und } y = \frac{\sqrt{c^2 + 2ch} - \sqrt{c^2 - 2ch}}{2}.$$

2) Die Hypotenuse z und die Catheten x und y eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, wenn die zur Hypotenuse senkrechte Höhe = h und die Differenz der Catheten = d gegeben ist.

Aufl. Aus den Gleichungen $x - y = d$,

$$x^2 + y^2 = z^2$$

und

$$xy = hz$$

ergibt sich zunächst $z = h + \sqrt{h^2 + d^2}$.

(Vor der Wurzel kann nicht das Zeichen (—) stehn, weil sonst die Hypotenuse z einen negativen Werth erhielte.) Ist aber z gefunden, so lassen sich auch x und y aus der ersten und zweiten gegebenen Gleichung leicht herleiten.

3) Wenn von einem rechtwinkligen Dreiecke der Umfang = p und die zur Hypotenuse senkrechte Höhe = h gegeben ist, so erhalten wir unter Beibehaltung der nämlichen Bezeichnungen wie in der vorhergehenden Aufgabe die Gleichungen

$$x + y + z = p$$
$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$xy = hz$$

und hieraus zunächst $z = \frac{p^2}{2(p + h)}$.

Ist aber z gefunden, so erhält man x und y durch Auflösung der 1. und 3. gegebenen Gleichung.

4) Ist ferner von einem rechtwinkligen Dreieck der Umfang = p und der Unterschied der Catheten = d gegeben, so lassen sich, wenn wir die schon früher angewendeten Bezeichnungen beibehalten, folgende Gleichungen aufstellen

$$x + y + z = p$$
$$x - y = d$$
$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Zufolge der ersten und zweiten Gleichung ist

$$x^2 + y^2 + 2xy = p^2 - 2pz + z^2$$

und

$$x^2 + y^2 - 2xy = d^2.$$

Addiren wir diese beiden Gleichungen und benutzen zugleich die dritte gegebene Gleichung, so ergibt sich $z^2 + 2pz = p^2 + d^2$

folglich $z = -p + \sqrt{2p^2 + d^2}$.

Ist hiernach z gefunden, so lassen sich x und y leicht mit Hilfe der 1. und 2. gegebenen Gleichung berechnen.

E. Von der Theorie der algebraischen Gleichungen.

Bemerkung. Wir haben im Vorhergehenden die Methoden angegeben, nach welchen man Gleichungen umzuformen und dieselben, wenn sie vom ersten oder zweiten Grade sind, aufzulösen pflegt. Wir haben aber bisher die Frage unbeantwortet gelassen, ob allemal oder unter welchen Bedingungen eine abgeleitete Gleichung mit der ursprünglichen genau dieselben Wurzeln hat. Bei einem streng systematischen Verfahren hätten wir eigentlich die Beantwortung dieser Frage der Entwickelung des praktischen Verfahrens zur Auflösung der Gleichungen voranschicken müssen. Aus didaktischen Rücksichten haben wir jedoch den umgekehrten Gang vorgezogen und lassen nun diese für

eine gründliche Behandlung der Algebra unentbehrliche*) Untersuchung folgen. Um aber die Beantwortung der eben aufgeworfenen Frage in einer gründlichen Weise herbeiführen zu können, müssen wir vorher ein paar Sätze aus der Lehre der Functionen voranschicken.

*§. 198, a. Erklärung.

Ausdrücke von der Form

$$ax + b,$$
$$ax^2 + bx + c,$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

u. s. w., in denen die Buchstaben a, b, c, d . . . von x ganz unabhängige Ausdrücke bezeichnen, werden ganze Functionen von x und zwar von der ersten, zweiten, dritten . . . Ordnung genannt, wenn 1, 2, 3 . . . der höchste Exponent von x ist.

Ein Quotient, welcher zum Nenner eine ganze Function von x und zum Zähler entweder ebenfalls eine ganze Function von x oder einen von x unabhängigen Ausdruck hat, heißt eine gebrochene Function. — Gebrochene Functionen sind also z. B.

$$\frac{a}{bx + c},\ \frac{ax + b}{cx^2 + dx + f},\ \frac{ax^2 + bx + c}{dx}\ \text{u. dgl. m.}$$

Im Folgenden werden wir mit F(x) eine beliebige ganze Function von x bezeichnen.

*§. 198, b. Lehrsatz.

Wenn eine ganze Function von x verschwindet, wenn $x = \alpha$ angenommen wird, so läßt sich dieselbe durch die Differenz $x - \alpha$ ohne Rest dividiren, und der Quotient ist einer ganzen Function von der nächstniedrigeren Ordnung gleich.

Bew. Wir wollen z. B. eine Function von der vierten Ordnung als gegeben annehmen und also

$$F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

setzen. Da dieselbe nach der Voraussetzung für $x = \alpha$ verschwinden soll, so muß

$$a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + d\alpha + e = 0,$$

folglich

$$e = - a\alpha^4 - b\alpha^3 - c\alpha^2 - d\alpha$$

sein. Setzen wir diesen Werth von e in die obige Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$F(x) = \begin{cases} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \\ - a\alpha^4 - b\alpha^3 - c\alpha^2 - d\alpha \end{cases}$$

oder $F(x) = a(x^4 - \alpha^4) + b(x^3 - \alpha^3) + c(x^2 - \alpha^2) + d(x - \alpha)$.

Dividiren wir beiderseits durch $(x - \alpha)$, so ergibt sich**)

$$\frac{F(x)}{x - \alpha} = \begin{cases} a(x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha^3) \\ + b(x^2 + \alpha x + \alpha^2) + c(x + \alpha) + d \end{cases}$$

oder geordnet

$$\frac{F(x)}{x - \alpha} = \begin{cases} ax^3 + (a\alpha + b)\,x^2 + (a\alpha^2 + b\alpha + c)\,x \\ + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d. \end{cases}$$

Der Quotient $\frac{F(x)}{x - \alpha}$ ist also einer Function der dritten Ordnung gleich.

---

*) In den meisten Lehrbüchern aber fehlende.

**) Vergl. oben §. 114, Uebungsbeispiele Nr. 10 u. folg.

Was wir hier für eine Function der vierten Ordnung erwiesen haben, kann offenbar eben so für eine Function von jeder beliebigen Ordnung dargethan werden.

So ist z. B. die Function

$$2x^3 - 7x^2 - 19x + 20,$$

welche für $x = 5$ verschwindet,

$$= (x - 5) . (2x^2 + 3x - 4).$$

*§. 198, c. Zusatz.

1) Aus der im vorhergehenden Paragraphen geführten Rechnung ergibt sich noch der folgende Satz: Wenn eine Function $F(x)$, welche für $x = \alpha$ verschwindet, durch $x - \alpha$ dividirt wird, so ist in dem entstandenen Quotienten der Coefficient des höchsten Gliedes (ax^3) gleich dem Coefficienten des höchsten Gliedes (ax^4) der gegebenen Function. — Weiter folgt aus dem vorhergehenden Satze:

2) **Wenn eine Function $F(x)$ für so viel verschiedene Werthe von x, welche wir mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ bezeichnen wollen, verschwindet, als die Ordnungszahl derselben anzeigt, so ist dieselbe gleich dem Producte**

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots,$$

multiplicirt mit dem Coefficienten des höchsten Gliedes.

Dem Beweise legen wir wieder eine Function der **vierten** Ordnung zu Grunde, also

$$F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Da $F(x)$ für $x = \alpha$ verschwinden soll, so ist der Quotient $\frac{F(x)}{x - \alpha}$ einer Function der dritten Ordnung gleich, deren höchster Coefficient zufolge des oben Erwiesenen $= a$ ist. Bezeichnen wir nun der Kürze wegen die drei übrigen Coefficienten mit f, g, h, so erhalten wir die Gleichung

$$F(x) = (x - \alpha)(ax^3 + fx^2 + gx + h).$$

Nach unserer Annahme soll die Function $F(x)$ auch für $x = \beta$ verschwinden.

Da β von α verschieden gedacht wird und ein Product nur dann verschwindet, wenn einer seiner Factoren gleich Null ist, so muß für $x = \beta$ in dem eben angeführten Producte der Factor

$$ax^3 + fx^2 + gx + h = 0$$

werden, und wir werden daher diesen Factor zerfällen können in ein Product, welches zu einem Factor $x - \beta$ und zum andern Factor eine Function der zweiten Ordnung hat, in welcher der Coefficient des höchsten Gliedes $= a$ ist. Bezeichnen wir die Coefficienten der beiden andern Glieder mit k und l, so erhalten wir die Gleichung

$$F(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(ax^2 + kx + l).$$

Da $F(x)$ auch für $x = \gamma$ verschwinden soll, so führt uns die Wiederholung der bereits zweimal angewendeten Schlußfolge zu einer Gleichung von der Form

$$F(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(ax + m),$$

wo wir mit m den Coefficienten des **zweiten** Gliedes der Function erster Ordnung bezeichnet haben, welcher hervorgeht, wenn wir die Function zweiter Ordnung $ax^2 + kx + l$ durch $x - \gamma$ dividiren.

Die Function $F(x)$ soll endlich noch für $x = \delta$ verschwinden. Da keiner der drei ersten Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ verschwindet, wenn $x = \delta$

angenommen wird, so muß der vierte Factor $ax + m = 0$ werden, wenn man in demselben $x = \delta$ setzt, also

$$a\delta + m = 0$$

sein, woraus sich $m = - a\delta$ ergibt. Setzen wir diesen Werth von m in die obige Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$F(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(ax - a\delta)$$

oder $F(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$.

Was wir hier für eine Function der vierten Ordnung dargethan haben, kann eben so für eine Function jeder beliebigen Ordnung erwiesen werden.

Als Beispiel führen wir die folgende Function an:

$$6x^4 + 11x^3 - 43x^2 + 34x - 8,$$

welche für $x = + 1$, $x = - 4$, $x = + \frac{1}{2}$ und $x = + \frac{2}{3}$ verschwindet; dieselbe ist gleich dem Producte

$$6(x - 1)(x + 4)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

3) Eine ganze Function von x kann niemals für mehr Werthe von x verschwinden, als die Ordnungszahl der Gleichung anzeigt. — Denn ist z. B. eine Function der vierten Ordnung gegeben

$$F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

von welcher wir annehmen wollen, daß sie für

$$x = \alpha,\ x = \beta,\ x = \gamma,\ x = \delta$$

verschwindet, so ist nach dem eben Bewiesenen

$$F(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta);$$

und es ist offenbar nicht möglich, daß die Function $F(x)$ für $x = \varepsilon$ verschwinde, wenn ε von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verschieden ist, da dann sämmtliche Factoren des eben angeführten Productes von Null verschiedene Werthe erhalten.

§. 198, d. Zusatz.

Die in den beiden vorherg. §§. erwiesenen Sätze lassen wichtige Anwendungen auf die Lehre von den Gleichungen zu.

1) Aus §. 198, b folgt zunächst, daß sich die Auflösung einer algebraischen Gleichung von der Form

$$F(x) = 0,$$

wenn eine Wurzel derselben bekannt ist, auf die Auflösung einer Gleichung nächstniedrigeren Grades zurückführen läßt.

Ist z. B. die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$$

gegeben, und setzen wir in derselben versuchsweise $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ u. s. w., so finden wir bald, daß $x = 2$ eine Wurzel dieser Gleichung ist. Dividiren wir nun die linke Seite derselben durch $x - 2$, und setzen den Quotienten gleich Null, so erhalten wir $x^2 - x - 20 = 0$.

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergibt $x = - 4$ und $x = + 5$. Demnach sind die sämmtlichen Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = + 2,\ x = - 4 \text{ und } x = + 5.$$

Es sei ferner die Gleichung $x^3 - 64 = 0$ gegeben, von welcher offenbar eine Wurzel $x = + 4$ ist. Dividiren wir die linke Seite durch $x - 4$ und setzen den Quotienten gleich Null, so erhalten wir die quadratische Gleichung $x^2 + 4x + 16 = 0$, aus welcher sich $x = - 2 \pm 2\sqrt{- 3}$

ergibt. Demnach sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x = +4,\ x = 4\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right),\ x = 4\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

Wenn wir der obigen Gleichung die Form

$$x^3 = 64$$

geben, so folgt aus derselben $x = \sqrt[3]{64}$.

Die soeben aufgeführten drei Werthe von x sind also sämmtlich der $\sqrt[3]{64}$ gleich. Diese Wurzel hat folglich drei verschiedene, einen reellen und zwei imaginäre, Werthe. Dasselbe gilt, wie leicht zu sehen, überhaupt von einer jeden Kubikwurzel aus einer positiven oder negativen Zahl.

Hieran anreihend zeigen wir noch, daß die vierte Wurzel aus einer jeden positiven oder negativen Zahl vier Werthe hat. Denn setzen wir z. B.

$$x^4 - 1 = 0,$$

so läßt sich diese Gleichung zerfällen in

$$(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = 0.$$

Wir haben daher die Gleichungen

$$x^2 - 1 = 0 \text{ und } x^2 + 1 = 0$$

aufzulösen, und die gesuchten Auflösungen sind

$$x = +1,\ x = -1,\ x = +\sqrt{-1} \text{ und } x = -\sqrt{-1}.$$

Ist ferner die Gleichung $x^4 + 1 = 0$

gegeben, so dürfen wir, da x in derselben offenbar von Null verschieden ist, die Gleichung durch x^2 dividiren. Wir erhalten dann

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 0,$$

wofür wir auch setzen können, indem wir auf beiden Seiten 2 addiren,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2,$$

also entweder $x + \frac{1}{x} = +\sqrt{2}$ oder $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{2}$.

Die Auflösungen dieser Gleichungen,

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot (+1 + \sqrt{-1}),\ x = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot (+1 - \sqrt{-1}),$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}}(-1 + \sqrt{-1}),\ x = \sqrt{\frac{1}{2}}(-1 - \sqrt{-1}),$$

sind die vier Werthe der $\sqrt[4]{-1}$.

Bedeutet p eine positive Zahl, und soll $\sqrt[4]{\pm p}$ gefunden werden, so suchen wir zunächst (durch zweimalige Ausziehung der Quadratwurzel) die rationale oder irrationale 4. Wurzel aus p. Ist diese = v, so ist offenbar

$$\sqrt[4]{+p} = v\sqrt[4]{+1} \text{ und } \sqrt[4]{-p} = v\sqrt[4]{-1}.$$

Wir erhalten daher die vier Werthe der $\sqrt[4]{+p}$ und die vier Werthe der $\sqrt[4]{-p}$, wenn wir die oben gefundenen Werthe von $\sqrt[4]{+1}$ und $\sqrt[4]{-1}$ mit v multipliciren.

In der Analysis wird gezeigt, daß überhaupt jede Wurzel so viel verschiedene Werthe hat, als ihr Exponent anzeigt, und die Methode angegeben, wie diese Werthe darzustellen sind.

(Nach dieser für das Folgende unwesentlichen Abschweifung kehren wir zur Theorie der Gleichungen zurück).

2) Wenn $x = \alpha$ eine Wurzel einer algebraischen Gleichung

$$F(x) = 0$$

ist und der Quotient $\frac{F(x)}{x - \alpha}$ ebenfalls für $x = \alpha$ verschwindet, also durch $x - \alpha$ ohne Rest theilbar ist, so ist offenbar die Function $F(x)$ durch $(x - \alpha)^2$ theilbar, und man sagt dann, die Gleichung $F(x) = 0$ enthalte die Wurzel $x - \alpha$ zweimal. Verschwindet auch der Quotient $\frac{F(x)}{(x - \alpha)^2}$ für $x = \alpha$, und ist also auch dieser Quotient durch $x = \alpha$ theilbar, so läßt sich die Function $F(x)$ durch $(x - \alpha)^3$ ohne Rest dividiren, was dahin ausgesprochen wird, die Gleichung $F(x) = 0$ enthalte die Wurzel $x = \alpha$ dreimal u. s. w.

Anm. Wenn wir die Gleichung

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0,$$

welcher, wie leicht zu sehen, durch die Annahme $x = 2$ genügt wird, durch $x - 2$ dividiren, so erhalten wir die quadratische Gleichung

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Lösen wir diese Gleichung auf bekannte Weise auf, so ergibt sich uns als die eine Wurzel abermals $x = 2$ und als die andere $x = 5$. Die gegebene Gleichung, welcher wir hiernach auch die Form

$$(x - 2)^2 . (x - 5) = 0$$

geben können, enthält folglich die Wurzel $x = 2$ zweimal.

3) Aus §. 198, c folgt unmittelbar, daß eine Gleichung niemals mehr Wurzeln haben kann, als die Gradzahl derselben anzeigt. In der Analysis wird erwiesen, daß jede algebraische Gleichung von der Form

$$F(x) = 0$$

so viel reelle oder imaginäre Wurzeln hat, als durch die Gradzahl derselben angegeben wird, wobei mehrfache Wurzeln auch mehrfach gezählt werden. Obschon wir den allgemeinen Beweis dieses Satzes, da derselbe schwierig und weitläufig zu führen ist, hier übergehn, so werden wir doch den Satz bei den folgenden Entwicklungen zu Hilfe nehmen, indem in der Elementarmathematik, so lange nicht über quadratische Gleichungen hinausgegangen wird, nur in seltensten Fällen ganze Functionen von höherer Ordnung als der zweiten, für welche der angeführte Satz in §. 190—193 erwiesen worden ist, vorkommen dürften*).

*§. 199, a. Erklärung.

Im Folgenden werden wir voraussetzen, daß in den zu behandelnden Gleichungen keine andern als ganze oder gebrochene Functionen der Unbekannten x vorkommen. In Hinsicht der gebrochenen Functionen werden wir noch überdies annehmen, daß der Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor haben, (also wenn ein solcher ursprünglich vorhanden gewesen sein sollte, derselbe bereits aufgehoben ist), und daß folglich nicht Zähler und Nenner für den nämlichen Werth von x verschwinden können. Durch die Buchstaben des großen lateinischen Alphabets A, B, C, D... werden wir ganze oder gebrochene Functionen der Unbekannten x, durch die Buchstaben des kleinen Alphabets a, b, c, d... aber von x unabhängige Ausdrücke bezeichnen.

*§. 199, b. Erklärung.

Zwei Gleichungen heißen gleichbedeutend, wenn jede Wurzel der einen auch eine Wurzel der andern ist, und sofern eine Wurzel in der einen Gleichung

*) Die in diesem Abschnitte noch folgenden Sätze lassen sich vielleicht auch ohne Zuziehung jenes Satzes erweisen; die Beweise gewinnen aber durch Benutzung desselben an Einfachheit und Anschaulichkeit.

mehrmals vorkommt, dieselbe in der andern eben so oft enthalten ist. Eine Gleichung heißt der andern untergeordnet, wenn alle Wurzeln der ersteren auch unter den Wurzeln der zweiten sich vorfinden, wenn aber außerdem die zweite Gleichung noch andere Wurzeln enthält, welche der erstern nicht zukommen, oder wenn eine beiden gemeinschaftliche Wurzel in der zweiten Gleichung häufiger als in der ersten vorkommt. Die zweite Gleichung wird dann der ersten übergeordnet genannt.

*§. 199, c. Zusatz.

Wenn man auf beiden Seiten einer Gleichung

$$A = B$$

den nämlichen Ausdruck C addirt oder subtrahirt, oder wenn man beide Seiten der Gleichung mit einem von x unabhängigen (und von Null verschiedenen) Ausdrucke c multiplicirt oder dividirt, so ist die so entstandene Gleichung der ursprünglichen gleichbedeutend.

Bew. Denn in allen Fällen, in denen

$$1)\quad A = B$$

ist, muß offenbar auch

$$2)\quad A \pm C = B \pm C,$$

so wie auch

$$3)\quad c \,.\, A = c \,.\, B$$

und

$$4)\quad \frac{A}{c} = \frac{B}{c}$$

sein und umgekehrt, wobei wir in Betreff der Gleichungen (3) und (4) noch besonders darauf aufmerksam machen, daß zufolge der Voraussetzung c nicht gleich Null werden darf.

*§. 200, a. Lehrsatz.

Wenn man beide Seiten einer Gleichung mit irgend einer ganzen Function der Unbekannten x multiplicirt, wenn ferner für keinen der Werthe von x, welcher diesen Factor zu Null macht, der Nenner eines in der Gleichung vorkommenden Bruches verschwindet, so hat die abgeleitete Gleichung nicht bloß sämmtliche Wurzeln der gegebenen, sondern außerdem auch noch diejenigen, welche den Factor, mit welchem man multiplicirt hat, zu Null machen.

Bew. Die gegebene Gleichung sei

$$1)\quad A + \frac{B}{C} = D,$$

wo wir diesmal annehmen, daß A, B, C und D ausschließlich ganze Functionen bedeuten; multipliciren wir diese Gleichung mit dem x enthaltenden Factor K, so muß der abgeleiteten Gleichung

$$2)\quad AK + \frac{BK}{C} = DK$$

offenbar zunächst in allen den Fällen Genüge geschehen, in denen die ursprüngliche Gleichung richtig ist. Derselben wird aber außerdem auch dann noch genügt, wenn wir statt x einen Werth setzen, für welchen der Factor K verschwindet, indem dann sämmtliche Glieder der Gleichung gleich Null werden, was insbesondere auch von dem gebrochenen Gliede $\frac{BK}{C}$ gelten muß, weil nach

der Voraussetzung des Lehrsatzes der Factor K und der Nenner C nicht gleichzeitig verschwinden, also auch keinen Factor gemeinschaftlich haben, der in beiden sich aufheben könnte.

Wir haben in der Gleichung (1) nur ein Glied als gebrochene Function angenommen; der Beweis bleibt jedoch offenbar derselbe, wenn deren mehrere vorkommen sollten, vorausgesetzt nur, daß sämmtliche Nenner derselben nach der Vorschrift des Lehrsatzes mit dem Ausdruck K keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

Anm. Wenn wir die Gleichungen

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

welcher die Wurzeln $x = 2$ und $x = -4$ zukommen, mit dem Factor $x - 5$, welcher für $x = 5$ verschwindet, multipliciren, so hat die abgeleitete Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$$

außer den schon angeführten auch noch die Wurzel $x = 5$. — Denn wir können der ursprünglichen Gleichung auch die Form

$$(x - 2) . (x + 4) = 0$$

und der abgeleiteten Gleichung die Form

$$(x - 2)(x + 4)(x - 5) = 0,$$

geben, wonach die Richtigkeit der aufgestellten Behauptungen in die Augen fällt.

Wenn wir die Gleichung

$$\frac{2x - 5}{x - 4} = 3,$$

welcher die Wurzel $x = 7$ zukommt, mit dem Factor $x - 2$ multipliciren, welcher für $x = 2$ verschwindet, während dieser Werth von x den in der Gleichung vorkommenden Nenner $x - 4$ nicht zu Null macht, so hat die abgeleitete Gleichung

$$\frac{2x^2 - 9x + 10}{x - 4} = 3x - 6$$

außer der Wurzel der gegebenen Gleichung $x = 7$ auch noch die Wurzel $x = 2$. — Geben wir der ursprünglichen Gleichung die Form

$$\frac{2x - 5 - 3(x - 4)}{x - 4} = 0,$$

und multipliciren wir diese Gleichung mit $x - 2$, so erhält dieselbe die Form

$$\frac{(2x - 5 - 3(x - 4))(x - 2)}{x - 4} = 0,$$

bei welcher sich die Wurzeln $x = 2$ und $x = 7$ sofort vor Augen stellen, da nach der Voraussetzung der Factor $2x - 5 - 3(x - 4)$ für $x = 2$ verschwindet.

*§. 200, b. Zusatz.

Wenn man eine Gleichung

$$1)\quad A = B$$

mit einem Factor K, welcher eine ganze Function der Unbekannten x ist, multiplicirt, so kann zufolge des vorhergehenden §. die abgeleitete Gleichung $\quad 2)\ AK = BK$

der ursprünglichen übergeordnet sein; sie kann aber außer den Wurzeln der gegebenen Gleichung und denjenigen Werthen von x, welche den Factor K zu Null machen, keine andern Wurzeln enthalten.

Bew. Angenommen, es sei $x = \delta$ ein Werth von x, welcher weder der Gleichung (1) Genüge leistet, noch den Factor K zu Null macht; so kann derselbe auch keine Wurzel der Gleichung (2) sein. Denn wenn man

$x = \delta$ annimmt, so erhalten zufolge der ersten Voraussetzung die beiden Seiten der Gleichung (1) A und B verschiedene Werthe, und da vermöge der zweiten Voraussetzung für $x = \delta$ der Factor K nicht $= 0$ wird, so kann ohnmöglich $AK = BK$ sein.

*§. 201, a. Lehrsatz.

Wenn in einer Gleichung

$$1)\ \frac{A}{B} + \frac{C}{D} + E = F,$$

(wo A, B, C, D, E, F diesmal ausschließlich ganze Functionen der Unbekannten x oder von x unabhängige Ausdrücke bezeichnen sollen), ein oder mehrere Glieder Brüche sind und man multiplicirt die ganze Gleichung mit dem Nenner B eines dieser Brüche, so haben die abgeleitete Gleichung

$$A + \frac{BC}{D} + BE = BF$$

und die gegebene Gleichung die nämlichen Wurzeln, vorausgesetzt jedoch, daß, wenn der Nenner B eine ganze Function von x ist, keiner der Werthe von x, für welchen dieser Nenner verschwindet, den zugehörigen Zähler A oder den Nenner irgend eines andern in der Gleichung vorkommenden Bruches zu Null macht.

Bew. Daß die Gleichung (2) in allen den Fällen richtig ist, wenn die Gleichung (1) gilt, also sämmtliche Wurzeln derselben enthalten muß, liegt auf der Hand, da es immer zuläßig ist, die Gleichung (1) mit B zu multipliciren, und daß sie außer diesen nicht andere Wurzeln enthalten kann, welche weder der Gleichung (1) genügen, noch den Nenner B zu Null machen, ist im vorhergehenden §. erwiesen. Daß aber endlich auch kein Werth von x, für welchen der Nenner B verschwindet, eine Wurzel der Gleichung (2) sein kann, ergibt sich aus Folgendem: Angenommen, es sei $x = \delta$ ein solcher Werth; dann verschwinden in der Gleichung (2), wenn in derselben $x = \delta$ gesetzt wird, zunächst die Producte BE und BF; und auch der Bruch $\frac{BC}{D}$ wird $= 0$, da zufolge der Voraussetzung der Nenner D für $x = \delta$ einen von Null verschiedenen Werth erhält; es müßte daher auch $A = 0$ sein, was gegen die oben ausgesprochene Annahme streitet.

Es hat daher die Gleichung (2) mit der Gleichung (1) die nämlichen Wurzeln.

Wir haben in der Gleichung (1) außer dem ersten Gliede nur noch ein zweites als gebrochene Function von x angenommen. Man sieht jedoch leicht, daß der Beweis keine wesentliche Aenderung erfährt, wenn deren mehrere vorhanden sein sollten.

In der Gleichung

$$1)\ \frac{6}{2x - 3} + 1 = x,$$

deren Wurzeln $x = 3$ und $x = -\frac{1}{2}$ sind, kommt nur ein einziger Bruch vor, und der Zähler desselben enthält die Unbekannte x gar nicht. Multipliciren wir daher diese Gleichung mit dem Nenner $2x - 3$, so muß die abgeleitete Gleichung

$$6 + 2x - 3 = x\,(2x - 3)$$

der ursprünglichen gleichbedeutend sein; und in der That wird sowohl der einen wie auch der andern durch die Annahme $x = +3$ und $x = -\frac{1}{2}$ genügt.

In der Gleichung

$$2)\quad \frac{x+3}{x-3} - \frac{x+1}{x-2} = 2$$

ist das erste Glied ein Bruch, dessen Nenner verschwindet, wenn $x = 3$ angenommen wird, während der Zähler $x + 3$ dieses Bruches und der Nenner $x + 2$ des außerdem noch in der Gleichung vorkommenden Bruches für diesen Werth von x nicht $= 0$ wird. Es muß daher, wenn wir die ganze Gleichung mit dem Nenner $x - 3$ multipliciren, die hervorgehende Gleichung der gegebenen gleichbedeutend sein. Dasselbe muß aus ganz ähnlichen Gründen der Fall sein, wenn wir die ursprüngliche Gleichung mit dem Nenner $x - 2$ des andern in derselben vorkommenden Bruches multipliciren. Wir wedern daher auch die gegebene Gleichung sofort mit dem Producte $(x - 2) . (x - 3)$ multipliciren dürfen; wir erhalten dann die derselben gleichbedeutende Gleichung

$$(x + 3)(x - 2) - (x + 1)(x - 3) = 2(x - 2)(x - 3),$$

deren Auflösung uns die Wurzeln $x = 5$ und $x = \frac{3}{2}$ ergibt.

In der Gleichung

$$3)\quad \frac{x^2 - 1}{x + 1} + 3 = 2x$$

verschwindet der Nenner $x + 1$ des in derselben vorkommenden Bruches für $x = -1$; da für diesen Werth von x auch der Zähler $x^2 - 1 = 0$ wird, so werden wir nicht behaupten dürfen, daß die Gleichung

$$x^2 - 1 + 3(x + 1) = 2x(x + 1),$$

welche wir erhalten, wenn wir die gegebene Gleichung mit dem Nenner $x + 1$ multipliciren, dieser gleichbedeutend ist.

Geordnet lautet die abgeleitete Gleichung

$$x^2 - x = 2,$$

wonach sich leicht für dieselbe die Wurzeln $x = 2$ und $x = -1$ ergeben, von denen jedoch nur die erstere $x = 2$ der ursprünglichen Gleichung zukommen kann, indem für die andere $x = -1$ diese Gleichung die algebraisch unzulässige Form

$$\frac{0}{0} + 3 = -2$$

annehmen würde. Außerdem ist aber

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1,$$

daher die gegebene Gleichung von der folgenden

$$x - 1 + 3 = 2x$$

nicht verschieden, welcher allein die Wurzel $x = 2$ zukommt.

Wenn wir die Gleichung

$$4)\quad \frac{1}{x - 1} + 2x = \frac{x}{x - 1}$$

mit dem Nenner $x - 1$ des ersten in derselben vorkommenden Bruches multipliciren, so erhalten wir

$$1 + 2x^2 - 2x = x$$

oder geordnet

$$2x^2 - 3x = -1,$$

eine Gleichung, welcher die Wurzeln $x = 1$ und $x = \frac{1}{2}$ zukommen, von denen jedoch

nur die letztere $x = \frac{1}{2}$ der ursprünglichen Gleichung angehört, während dieselbe für die andere Wurzel $x = 1$ in die algebraisch unzulässige Form

$$\frac{1}{0} + 2 = \frac{1}{0}.$$

übergehen würde. Bei der Ableitung ist aber auch keineswegs den Bedingungen des vorhergehenden Lehrsatzes vollständig entsprochen worden, indem außer dem ersten Bruche, dessen Nenner $x - 1$ ist, noch ein zweiter Bruch mit dem nämlichen Nenner, der also ebenfalls für $x = 1$ verschwindet, in der Gleichung vorhanden ist. Bringen wir diese beiden Brüche durch Transponiren auf die nämliche, z. B. auf die linke Seite, so geht die ursprüngliche Gleichung über in

$$\frac{1}{x - 1} - \frac{x}{x - 1} + 2x = 0$$

oder zusammengezogen $$\frac{1 - x}{x - 1} + 2x = 0$$

und aufgehoben $$-1 + 2x = 0;$$

der ursprünglichen Gleichung kommt daher nur die eine Wurzel $x = \frac{1}{2}$ zu.

Wenn wir in der folgenden Gleichung

$$5) \quad \frac{1 - x}{x^2 + x} - 1 = \frac{1}{x},$$

um die Brüche wegzuschaffen, beide Seiten mit dem (kleinsten) Generalnenner $x^2 + x$ multipliciren, so erhalten wir die Gleichung

$$1 - x - x^2 - x = x + 1$$

oder geordnet $$x^2 + 3x = 0,$$

eine Gleichung mit den beiden Wurzeln $x = 0$ und $x = -3$, von denen jedoch nur die letzte für die gegebene Gleichung paßt, da die andere, in diese Gleichung eingesetzt, dieselbe in die algebraisch unzulässige Form

$$\frac{1}{0} - 1 = \frac{1}{0}$$

verwandelt. Es ist aber auch hier bei der Ableitung den Bedingungen des obigen Lehrsatzes nicht vollständig genügt worden, da außer dem einen Bruche

$$\frac{1 - x}{x^2 + x}$$

sich noch ein anderer Bruch $\frac{1}{x}$ in der Gleichung vorfand, bei welchem der Nenner eben so wie bei jenem verschwindet, wenn man $x = 0$ setzt.

Die Vorschrift: „um in einer Gleichung die Brüche wegzuschaffen, soll man dieselbe mit dem kleinsten Generalnenner multipliciren", reicht daher nicht in allen Fällen aus, wenn die abgeleitete Gleichung der ursprünglichen gleichbedeutend sein soll. Man hat vielmehr, um ganz sicher zu gehen, wenn in einer Gleichung mehrere Brüche vorkommen, deren Nenner die Unbekannte x enthalten und für einen gleichen Werth derselben verschwinden, diese durch Transponiren auf eine Seite zu bringen, in einen Bruch zu vereinigen und im Zähler und Nenner die gemeinschaftlichen Factoren aufzuheben.

Wendet man dieses Verfahren auf die obige Gleichung

$$\frac{1 - x}{x^2 + x} - 1 = \frac{1}{x}$$

an, so verwandelt sich dieselbe zunächst in

$$\frac{1-x}{x^2+x} - \frac{1}{x} - 1 = 0$$

oder zusammengezogen $$\frac{-2x}{x^2+x} - 1 = 0,$$

also aufgehoben $$\frac{-2}{x+1} - 1 = 0.$$

Kehren wir in dieser Gleichung die Vorzeichen um und multipliciren dieselbe, um den Bruch wegzuschaffen, mit dem Nenner $x + 1$, so erhalten wir

$$x + 3 = 0,$$

wonach sich $$x = -3$$

als die allein giltige Wurzel der obigen Gleichung ergibt.

*§. 201, b. Zusatz.

Wenn eine Gleichung von der Form

$$F(x) = 0$$

durch eine ganze Function von x dividirt wird, so ist die abgeleitete Gleichung der gegebenen Gleichung gleichbedeutend oder untergeordnet und zwar das letztere dann, wenn der Divisor für solche Werthe von x, welche sich unter den Wurzeln der gegebenen Gleichung vorfinden, verschwindet und daher mit dieser gemeinschaftliche Factoren hat, die sich bei der Division aufheben, — wie leicht aus den vorhergehenden Sätzen hervorgeht.

Wenn wir die Gleichung

$$x^2 - 5x = 0$$

durch x dividiren, so hat die abgeleitete Gleichung

$$x - 5 = 0$$

nur die eine Wurzel $x = 5$, während der ursprünglichen Gleichung auch noch die Wurzel $x = 0$ zukommt.

Wenn wir ferner die Gleichung

$$6x^3 - 7x^2 - 9x - 2 = 0,$$

welcher die Wurzeln $x = 2$, $x = -\frac{1}{2}$ und $x = -\frac{1}{3}$ zukommen, durch $x - 2$ dividiren, so geht die Gleichung

$$6x^2 + 5x + 1 = 0$$

hervor, welche nur noch die Wurzel $x = -\frac{1}{2}$ und $x = -\frac{1}{3}$ enthält.

*§. 202. Lehrsatz.

Wenn man die beiden Seiten einer Gleichung

$$A = B$$

ins Quadrat erhebt, so enthält die abgeleitete Gleichung

$$A^2 = B^2$$

außer den Wurzeln der gegebenen Gleichung auch noch diejenigen, welche der Gleichung

$$A = -B$$

angehören; und wenn man auf beiden Seiten einer Gleichung

$$A = B$$

die Quadratwurzel auszieht, so hat man zu den Wurzeln der abgeleiteten Gleichung $\sqrt{A} = \sqrt{B}$

auch noch die Wurzeln der Gleichung

$$\sqrt{A} = -\sqrt{B}$$

hinzuzufügen, um die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung vollständig zu erhalten.

Der Beweis für die Richtigkeit der vorstehenden Behauptungen folgt unmittelbar aus §. 135, 1 und 2.

Wenn wir die beiden Seiten der Gleichung

$$1)\ 2x - 1 = 8 - x$$

ins Quadrat erheben, so erhalten wir die Gleichung

$$2)\ 4x^2 - 4x + 1 = 64 - 16x + x^2$$

oder

$$3x^2 + 12x = 63,$$

welcher die beiden Wurzeln $x = +3$ und $x = -7$ zukommen, von denen nur die erste der Gleichung (1) angehört, während die andere eine Wurzel der Gleichung

$$2x - 1 = -(8 - x)$$

ist. — Umgekehrt, wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung (2) die Quadratwurzel ausziehen, so bekommen wir zunächst die Gleichung

$$2x - 1 = 8 - x,$$

welche die Wurzel $x = 2$ hat. Wollen wir aber die Wurzeln der Gleichung (2) vollständig erhalten, so haben wir noch die Gleichung

$$2x - 1 = x - 8$$

aufzulösen und die Wurzel dieser Gleichung $x = -7$ hinzuzufügen.

In letzterer Hinsicht wollen wir nicht unerwähnt lassen, daß auch der Fall eintreten kann, daß von den beiden durch Ausziehung der Quadratwurzel erhaltenen Gleichungen nur eine derselben eine und zwar die einzige für die gegebene Gleichung passende Wurzel liefert. Wenn wir z. B. aus den beiden Seiten der Gleichung

$$1 + 2x + x^2 = x^2 - 10x + 25$$

die Quadratwurzel ziehn, so erhalten wir entweder

$$1 + x = x - 5$$

oder $1 + x = 5 - x.$

Von diesen Gleichungen liefert aber nur die zweite die der gegebenen Gleichung zukommende Wurzel $x = 2$, während die erste überhaupt nicht bestehen kann.

Sechster Abschnitt.

Von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

A. Von den ganzen Potenzen.

§. 203, a (198*). Erklärung.

Einen Ausdruck mit einer (positiven ganzen) Zahl potenziren, heißt den Ausdruck so oft multipliciren**), als die Zahl anzeigt. Der wiederholt zu multiplicirende Ausdruck wird Dignand, die Zahl, welche anzeigt, wie oft dies geschehen soll, Exponent und der durch Potenziren erhaltene Aus-

*) Die eingeschlossene Zahl zeigt die Nummer des Paragraphen in der früheren Auflage an.

**) Genauer: als Factor setzen.

druck **Potenz** genannt. Ist der Dignand = a, der Exponent = m, so bezeichnet man die Potenz durch a^m (lies: a hoch m). Man versteht also unter a^m ein Product aus m gleichen Factoren, deren jeder = a ist.

§. 203, b (199). Zusatz.

Aus der vorhergehenden Erklärung folgt unmittelbar:

1) Jede Potenz läßt sich in ein Product aus gleichen Factoren verwandeln, indem man den Dignanden so oft als Factor schreibt, als der Exponent anzeigt; so ist z. B.

$$a^5 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a.$$

2) Ein Product aus gleichen Factoren kann durch eine Potenz ersetzt werden, indem man den gleichen Factor zum Dignanden und die Anzahl derselben zum Exponenten macht; so ist z. B.

$$a \,.\, a \,.\, a \,.\, a = a^4.$$

Bemerkung.

Zufolge der beiden vorhergehenden §§. wird man leicht bemerken, daß das Potenziren große Aehnlichkeit mit dem Multipliciren hat; während nämlich das Product ein abgekürztes Zeichen für eine Summe aus gleichen Summanden ist, ist die Potenz ein kurz ausgedrücktes Product aus gleichen Factoren. Es werden daher auch die Sätze von den Potenzen in ganz ähnlicher Art wie die Sätze der Multiplication erwiesen, nämlich dadurch, daß man die betreffenden Potenzen in Producte verwandelt. — Ein wesentlicher Unterschied zwischen Product und Potenz findet jedoch in dem Umstande statt, daß man in einem Producte den Multiplicator und Multiplicandus verwechseln, dagegen in einer Potenz Dignand und Exponent im allgemeinen nicht mit einander vertauschen darf. So ist z. B. $3 \,.\, 4 = 4 \,.\, 3$, aber

$$3^4 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 81$$

und

$$4^3 = 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 64$$

Es bedeuten also 3^4 und 4^3 zwei ganz verschiedene Zahlen.

§. 204, a (200). Lehrsatz.

Ein Product wird potenzirt, wenn man jeden Factor potenzirt, in Zeichen:

$$1)\quad (a \,.\, b)^m = a^m \,.\, b^m$$

$$2)\quad (a \,.\, b \,.\, c)^m = a^m \,.\, b^m \,.\, c^m \text{ u. s. w.}$$

Bew. zu (1). — Die Potenz

$$(a \,.\, b)^m$$

läßt sich nach dem vorhergehenden §. in ein Product aus gleichen Factoren verwandeln, indem man den Dignanden a . b so oft als Factor setzt, als der Exponent m anzeigt; wir erhalten so

$$\underbrace{(a \,.\, b) \,.\, (a \,.\, b) \,.\, (a \,.\, b) \ldots\ldots}_{\text{(mmal)}}$$

Da aber die Ordnung der Factoren gleichgiltig ist, so können wir hierfür auch setzen

$$\underbrace{a \,.\, a \,.\, a \ldots\ldots}_{\text{(mmal)}} \underbrace{b \,.\, b \,.\, b \ldots\ldots}_{\text{(mmal)}}$$

Statt des Productes $\underbrace{a \,.\, a \,.\, a \ldots\ldots}_{\text{(mmal)}}$ können wir aber auch kürzer die Potenz a^m und statt $\underbrace{b \,.\, b \,.\, b \ldots\ldots}_{\text{(mmal)}}$ die Potenz b^m setzen; so erhalten wir für den ganzen Ausdruck $a^m \,.\, b^m$, w. z. b. w.

Bew. zu (2). — Man ziehe in dem Producte a . b . c zwei Factoren a und b in einen zusammen und setze also

$$(a \,.\, b \,.\, c)^m = [(a \,.\, b) \,.\, c]^m.$$

In (1) haben wir bereits gesehen, daß ein Product aus zwei Factoren potenzirt wird, wenn man jeden Factor potenzirt; wir können daher für den obigen Ausdruck auch setzen

$$(a \,.\, b)^m \,.\, c^m$$

und hierfür nach derselben Regel

$$a^m \,.\, b^m \,.\, c^m.$$

Eben so kann der Beweis auch für ein Product aus vier Factoren geführt werden, indem man drei Factoren in einen vereinigt u. s. w.

§. 204, b (201). Lehrsatz.

Ein Quotient wird potenzirt, wenn man Divisor und Dividendus potenzirt, in Zeichen:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Bew. Die Potenz

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m$$

läßt sich ersetzen durch das Product aus gleichen Factoren

$$\frac{a}{b} \,.\, \frac{a}{b} \,.\, \frac{a}{b} \,.....^{(mmal)}$$

Brüche werden multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt; wir können daher für den letzten Ausdruck auch setzen

$$\frac{\overset{(mmal)}{a \,.\, a \,.\, a \,.....}}{\underset{}{\overset{(mmal)}{b \,.\, b \,.\, b \,.....}}}$$

oder kürzer $\frac{a^m}{b^m}$, w. z. b. w.

§. 204, c (202). Zusatz.

Wenn wir die Gleichungen der beiden letzten §§.

$$(a \,.\, b)^m = a^m \,.\, b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

rückwärts lesen, so ergibt sich aus denselben noch folgende Regel: Potenzen mit gleichem Exponenten werden mit einander multiplicirt oder dividirt, wenn man ihre Dignanden mit einander multiplicirt oder dividirt.

§. 205, a (203). Lehrsatz.

Potenzen, welche einen gleichen Dignanden haben, werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt, in Zeichen:

1) $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$

2) $a^m \,.\, a^n \,.\, a^p = a^{m+n+p}$ u. s. w.

Bew. zu (1). — Wenn wir die Potenzen a^m und a^n in Producte verwandeln, so erhalten wir

$$a^m \,.\, a^n = \overset{(mmal)}{a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.....}\; \overset{(nmal)}{a \,.\, a \,.\, a \,.....}$$

Da in diesem Producte der Factor a zunächst mmal und dann noch nmal, also überhaupt m + nmal enthalten ist, so können wir dafür auch kürzer setzen die Potenz a^{m+n}, w. z. b. w.

Der Beweis von (2) wird leicht aus (1) erhalten, indem wir (in ähnlicher Art wie in §. 204, a) zwei Factoren in einen zusammenziehen.

§. 205, b (204). Lehrsatz.

Potenzen mit gleichem Dignanden werden durcheinander dividirt, wenn man ihre Exponenten von einander subtrahirt, in Zeichen:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

wobei natürlich $m > n$ vorausgesetzt ist.

Bew. Dieser Satz läßt sich leicht auf den vorhergehenden zurückführen. Die vorstehende Gleichung sagt nämlich nichts anderes aus, als daß

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m$$

ist. Im vorhergehenden §. haben wir bereits gesehen, daß zwei Potenzen a^{m-n} und a^n, welche einen gleichen Dignanden a haben, multiplicirt werden, wenn man ihre Exponenten $m - n$ und n addirt. Demnach ist

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 206, a (205). Lehrsatz.

Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man ihren Exponenten mit der Zahl multiplicirt, in Zeichen:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Bew. Die Potenz $(a^m)^n$ läßt sich in ein Product verwandeln, indem wir den Dignanden a^m so oft als Factor setzen, als der Exponent n anzeigt; wir erhalten so

$$\overset{(n\text{mal})}{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots\ldots}$$

Hierauf wenden wir die Regel an: Potenzen mit gleichem Dignanden werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt; dann bekommen wir

$$a^{\overset{(n\text{mal})}{m+m+m \ldots\ldots}}$$

Statt der Summe aus gleichen Summanden $\overset{(n\text{mal})}{m + m + m \ldots\ldots}$ können wir aber auch kürzer das Product $m \cdot n$ setzen. Hiernach verwandelt sich der letzte Ausdruck in $a^{m \cdot n}$, w. z. b. w.

§. 206, b (206). Zusatz.

1) Wenn wir die Gleichung des vorhergehenden §.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

rückwärts lesen, so ergibt sich aus derselben noch folgende Regel: Ein Ausdruck a wird mit einem Producte $m \cdot n$ potenzirt, wenn man denselben erst mit dem einen Factor m potenzirt und hierauf die entstandene Potenz a^m mit dem andern Factor n ebenfalls potenzirt.

2) Weiter folgt aus dem vorhergehenden §.: Wenn man einen Ausdruck mit zwei Zahlen nach einander potenziren soll, so ist es einerlei, in welcher Ordnung man dieses thut, in Zeichen:

$$(a^m)^n = (a^n)^m;$$

denn beide Seiten dieser Gleichung sind nach dem vorhergehenden §.

$$= a^{m \cdot n}.$$

3) Aus der so eben aufgestellten Gleichung läßt sich noch die Regel ziehen: Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man den Dignanden mit der Zahl potenzirt.

Bemerkung.

Die vorhergehenden §§. enthalten die Fundamentalsätze der Lehre von den Potenzen. Im allgemeinen können hierbei zehn Fälle in Betracht gezogen werden. Es kann nämlich der Dignand eine Summe, eine Differenz, ein Product, ein Quotient und eine Potenz sein; und die nämlichen fünf Fälle können auch in Hinsicht des Exponenten stattfinden. Diese zehn Fälle sind also in Zeichen:

1)	$(a + b)^m$	6)	a^{m+n}
2)	$(a - b)^m$	7)	a^{m-n}
3)	$(a \,.\, b)^m$	8)	$a^{m \cdot n}$
4)	$\left(\frac{a}{b}\right)^m$	9)	$a^{\frac{m}{n}}$
5)	$(a^m)^n$	10)	$a^{(m^n)}$

Von diesen zehn Fällen sind im Vorhergehenden wirklich erledigt: (3) in §. 204, a, (4) in §. 204, b, (5) in §. 206, a, (6) in §. 205, a, (7) in §. 205, b, (8) in §. 206, a. Es fehlen also (1), (2), (9) und (10). — Die beiden ersten Ausdrücke $(a + b)^m$ und $(a - b)^m$ sind hier übergangen, weil die an die Stelle derselben zu setzenden Ausdrücke nicht die Einfachheit der in den vorstehenden §§. behandelten Ausdrücke haben. Diese beiden Fälle werden weiter unten im binomischen Lehrsatze (§. 271) ihre Erledigung finden. Der neunte Fall $a^{\frac{m}{n}}$ wird in dem nächsten Capitel von den Wurzeln (§. 217) behandelt. Der zehnte Fall dagegen $a^{(m^n)}$ findet auch später keine Erledigung, indem es keinen passenden Ausdruck gibt, welcher sich dafür setzen ließe, was offenbar darin seinen Grund hat, daß in der Potenz sich Dignand und Exponent nicht mit einander verwechseln lassen.

Zur Einübung der vorhergehenden Sätze können folgende Beispiele dienen:

1) $(a \,.\, b)^5 = a^5 \,.\, b^5$

2) $(2a)^3 = 8a^3$

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$

4) $\left(\frac{3a}{4b}\right)^2 = \frac{9a^2}{16b^2}$

5) $a^4 \,.\, a^3 = a^7$

6) $3a^2 \,.\, 5a^3 = 15a^5$

7) $4a^5b^2 \,.\, 6a^3b^4 = 24a^8b^6$

8) $9ab^2c^7 \,.\, 12a^4b^3c = 108a^5b^5c^8$

9) $\frac{a^9}{a^6} = a^3$

10) $\frac{12a^5}{4a^2} = 3a^3$

11) $\frac{25a^4b^9}{15a^3b^7c} = \frac{5ab^2}{3c}$

12) $\frac{8a^6b^2}{12a^4b^7} = \frac{2a^2}{3b^5}$

13) $\frac{7a^2}{14a^3b} = \frac{1}{2ab}$

14) $\frac{15a^3b^4}{5a^7b^6} = \frac{3}{a^4b^2}$

15) $(a^3)^4 = a^{12}$

16) $(4a^5)^3 = 64a^{15}$

17) $(2a^3b^5)^4 = 16a^{12}b^{20}$

18) $(8a^2b^4c)^2 = 64a^4b^8c^2$

19) $\left(\frac{3a}{5b^2}\right)^3 = \frac{27a^3}{125b^6}$

20) $\left(\frac{2a^3b}{3c^2}\right)^5 = \frac{32a^{15}b^5}{243c^{10}}$

21) $(5a^3b^2 + 7ab^4) \,.\, 3ab^2 = 15a^4b^4 + 21a^2b^6$

22) $(3a^4 - 4a^2b^2 + b^4) \,.\, -5a^2b^3 = -15a^6b^3 + 20a^4b^5 - 5a^2b^7$

23) $(2a^3 + 3a^5) \,.\, (a^4 + 2a^6) = 2a^7 + 7a^9 + 6a^{11}$

24) $(5a^2 - 7a^5) \,.\, (3a + 4a^4) = 15a^3 - a^6 - 28a^9$

25) $(a^4b^2 - 2a^3b^3) \,.\, (4a^3b - 5a^2b^2) = 4a^7b^3 - 13a^6b^4 + 10a^5b^5$

26) $(3x^5 - 7x^3 - x) \,.\, (4x^4 + 2x^2) = 12x^9 - 22x^7 - 18x^5 - 2x^3$

27) $\frac{15a^3}{8b^5} \,.\, 16b^2 = \frac{30a^3}{b^3}$

28) $\frac{4x^2}{(a+b)^3} \,.\, \frac{(a+b)^4}{6x} = \frac{2(a+b)x}{3}$

29) $\frac{8a^6}{5b^2} : 4a^2 = \frac{2a^4}{5b^2}$

30) $\frac{6x^2}{a^2} : 8x^5 = \frac{3}{4a^2x^3}$

31) $9a^5 : \frac{3a^4}{2b} = 6ab$

32) $\frac{3a^2}{5b^3} : \frac{9a^4}{10b^5} = \frac{2b^2}{3a^2}$

33) $(a-b)^2 : \frac{1}{(a-b)^3} = (a-b)^5$

34) $4a^m \,.\, 3a^m = 12a^{2m}$

35) $14a^m : 7a^{m-n} = 2a^n$

36) $\frac{a^m}{b^n} : \frac{b^n}{a^p} = \frac{a^{m+p}}{b^{2n}}$

§. 207. Lehrsatz.

Null mit einer jeden (positiven ganzen) Zahl potenzirt, gibt immer wieder Null, und eben so gibt Eins, in jede beliebige Potenz erhoben, immer wieder Eins, in Zeichen:

$$0^m = 0 \text{ und } 1^m = 1.$$

Bew. Denn wenn man Null mit sich selbst multiplicirt, so erhält man wieder Null, und eben so gibt Eins mit sich selbst multiplicirt wieder Eins.

§. 208. Lehrsatz.

1) Die Potenz einer positiven Zahl ist allemal wieder eine positive Zahl.

2) Die Potenz einer negativen Zahl dagegen ist einer positiven oder einer negativen Zahl gleich, je nachdem der Exponent eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Bew. Die Richtigkeit der ersten Behauptung fällt sogleich in die Augen; die zweite Behauptung beruht darauf, daß gleiche Zeichen beim Multipliciren (+), ungleiche (—) geben. Hiernach ist also

$$(-a)^2 = (-a) \,.\, (-a) = + (a \,.\, a) = + a^2.$$

Multipliciren wir beide Seiten dieser Gleichung mit — a, so erhalten wir

$$(-a)^3 = + a^2 \,.\, - a = - a^3.$$

Multipliciren wir abermals mit — a, so ergibt sich

$$(-a)^4 = - a^3 \,.\, - a = + a^4 \text{ u. s. w.}$$

§. 209. Lehrsatz.

Unter der Voraussetzung, daß sämmtliche Dignanden positive Zahlen sind, lassen sich folgende Behauptungen aufstellen:

1) Größeres mit Gleichem potenzirt gibt Größeres. — Ist z. B. $a > b$, so ist auch $a^m > b^m$.

Dagegen läßt sich nicht unbedingt behaupten, daß Gleiches mit Größerem potenzirt immer Größeres gibt. Vielmehr ist

2) die Potenz eines ächten Bruches um so kleiner, je größer der Exponent ist; also wenn $a < 1$ und $m > n$ ist, so ist $a^m < a^n$.

3) Die Potenz eines unächten Bruches aber, (welcher > 1 ist,) ist um so größer, je größer der Exponent ist; also wenn $a > 1$ und $m > n$ ist, so ist auch $a^m > a^n$.

Bew. 1) Nach der Voraussetzung ist

$$a > b,$$

folglich nach §. 129 auch

$$a \,.\, a > b \,.\, b, \text{ d. h. } a^2 > b^2,$$

daher auch nach demselben §.

$$a^2 . a > b^2 . b, \text{ d. h. } a^3 > b^3 \text{ u. s. w.}$$

2) Wenn $a < 1$

ist und wir multipliciren beiderseits mit a, so erhalten wir

$$a^2 < a.$$

Multipliciren wir abermals mit a, so ergibt sich

$$a^3 < a^2.$$

Eben so finden wir weiter

$$a^4 < a^3$$

$$a^5 < a^4 \text{ u. s. f.}$$

Je größer also der Exponent ist, um so kleiner ist die Potenz eines ächten Bruches.

3) Ist dagegen $a > 1$,

so findet man auf ganz gleiche Weise

$$a^2 > a$$

$$a^3 > a^2 \text{ u. s. w.}$$

*§. 210. Zusatz.

Sind a und b positive Zahlen, und ist $a^m = b^m$, so muß auch $a = b$ sein.

Bew. Denn gesetzt es wäre $a > b$, so müßte nach (1) des vorhergehenden §. $a^m > b^m$ sein, was gegen die Voraussetzung streitet.

B. Von den Wurzeln.

§. 211. Erklärung.

Bezeichnen a und b positive ganze oder gebrochene Zahlen und m eine positive ganze Zahl, und denkt man sich in der Gleichung

$$b^m = a$$

a und m gegeben und b gesucht, so heißt b die mte Wurzel aus a.

Man bezeichnet dieselbe durch $\sqrt[m]{a}$

und versteht also hierunter diejenige (positive) Zahl, welche mit m potenzirt a gibt. Der Ausdruck a wird der Radicand und die Zahl m der Wurzelexponent genannt. — Eine positive ganze oder gebrochene Zahl a durch eine ganze positive Zahl m radiciren, heißt die mte Wurzel aus a finden. — Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man gewöhlich bloß $\sqrt{a}$.

§. 212. Zusatz.

In der vorstehenden Erklärung ist der Begriff der Wurzel auf den Fall beschränkt worden, daß der Radicand eine positive Zahl ist; eben so soll auch unter der Wurzel selbst nur eine positive Zahl verstanden werden. Ohne diese letztere Beschränkung würde man zweideutige*) Ausdrücke erhalten, da jede Wurzel mit geraden Exponenten aus einer positiven Zahl sowohl einer positiven als einer negativen Zahl, z. B. $\sqrt[2]{+9}$, sowohl $= +3$ als auch $= -3$, (indem auch $(-3)^2 = +9$ ist), sein könnte. Ohne die erstere Beschränkung aber würde man, wenn man aus negativen Zahlen Wurzeln mit geraden Exponenten ausziehen wollte, (z. B. $\sqrt[2]{-9}$), zu imaginären Ausdrücken gelangen, d. h. zu Ausdrücken, welche weder einer positiven noch einer negativen Zahl gleich sein können.

*) Eigentlich so vieldeutige, als der Exponent Einheiten enthält.

(Daß aber die Wurzel aus einer positiven Zahl allemal nur einer einzigen positiven Zahl gleich sein kann, ist in §. 210 erwiesen.)

§. 213. Zusatz.

1) Zufolge §. 211 sagen die beiden Gleichungen

$$1)\ \sqrt[m]{a} = b \text{ und } 2)\ b^m = a$$

genau dasselbe aus, (so lange a und b positive Zahlen bezeichnen, was im Folgenden immer vorausgesetzt wird). Kann man daher die Gleichung (2) als richtig erweisen, so ist hiermit auch die Gleichung (1) als richtig dargethan*). So ist z. B. $\sqrt[4]{a^{12}} = a^3$, weil nach §. 206 $(a^3)^4 = a^{12}$ ist.

2) Wenn man in der Gleichung (2) b durch $\sqrt[m]{a}$ ersetzt, so verwandelt sich dieselbe in $$(\sqrt[m]{a})^m = a,$$
d. h. ein Ausdruck bleibt ungeändert, wenn man ihn mit der nämlichen Zahl radicirt und potenzirt.

3) Ersetzt man dagegen in der Gleichung (1) a durch b^m, so geht dieselbe über in $$\sqrt[m]{b^m} = b,$$
d. h. eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie mit der nämlichen Zahl potenzirt und radicirt.

Bemerkung.

Da das Radiciren offenbar das Umgekehrte vom Potenziren ist, so werden die nächstfolgenden Sätze über Wurzeln durch Umkehrung der analogen Sätze von den Potenzen §. 204, a, b u. c und 206, a u. b erhalten. Dagegen lassen §. 205, a u. b über Potenzen eine solche Umkehrung nicht zu.

§. 214. Lehrsatz.

Ein Product wird radicirt, wenn man jeden Factor radicirt, in Zeichen:

$$1)\ \sqrt[m]{(a \cdot b)} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}.$$

$$2)\ \sqrt[m]{(a \cdot b \cdot c)} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} \text{ u. dgl. m.}$$

Bew. zu 1). Es ist hier zu beweisen, daß

$$(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = a \cdot b$$

ist**). Auf die Potenz $(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m$
wenden wir die Regel an: Ein Product wird potenzirt, wenn man jeden Factor potenzirt; dann erhalten wir

$$(\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m.$$

Statt $(\sqrt[m]{a})^m$ können wir nach §. 213, 2 kürzer a und statt $(\sqrt[m]{b})^m$ kürzer b setzen; dann bekommen wir für den ganzen Ausdruck

a . b, w. z. b. w.

Bew. zu 2). Die Gleichung (2) wird aus (1) erhalten, indem man zwei Factoren in einen zusammenzieht. (Vergl. oben §. 204, a.)

---

*) Auf diese Bemerkung gründen sich die Beweise aller folgenden Sätze über Wurzeln.

**) Vergl. oben §. 213, 1.

§. 215. Lehrsatz.

Ein Quotient wird radicirt, wenn man Divisor und Dividendus radicirt, in Zeichen:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Bew. Es ist hier zu beweisen, daß

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{a}{b}$$

ist. Auf die Potenz

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m$$

wenden wir die Regel an: Ein Quotient wird potenzirt, wenn man Divisor und Dividendus potenzirt; so erhalten wir

$$\frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m},$$

wofür wir auch nach §. 213, 2 kürzer setzen können

$$\frac{a}{b}, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 216. Zusatz.

Wenn wir die Gleichungen der beiden vorhergehenden §§.

$$\sqrt[m]{a\,.\,b} = \sqrt[m]{a}\,.\,\sqrt[m]{b}$$

und

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

rückwärts lesen, so erhalten wir noch folgende Regel: **Wurzeln mit gleichen Exponenten werden mit einander multiplicirt oder dividirt, wenn man ihre Radicanden mit einander multiplicirt oder dividirt.**

§. 217. Lehrsatz.

Eine Potenz wird durch eine Zahl radicirt, wenn man ihren Exponenten durch die Zahl dividirt, in Zeichen:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}},$$

wobei natürlich vorausgesetzt ist, daß der Wurzelexponent m in dem Potenzexponenten n aufgeht.

Bew. Es ist hier zu beweisen, daß

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^n$$

ist. Auf die Potenz

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m$$

wenden wir die Regel an: Eine Potenz wird potenzirt, wenn man ihren Exponenten multiplicirt; wir erhalten also

$$a^{\frac{n}{m} \cdot m}$$

oder da $\frac{n}{m} \cdot m = n$ ist, $\quad a^n$, w. z. b. w.

§. 218. Lehrsatz.

Wenn man einen Ausdruck mit einer Zahl potenziren und durch eine andere Zahl radiciren soll, so ist es einerlei, in welcher Ordnung man dies thut, in Zeichen:

$$\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n.$$

Bew. Es ist hier zu beweisen, daß

$$[(\sqrt[m]{a})^n]^m = a^n$$

ist. Auf die Potenz $\quad [(\sqrt[m]{a})^n]^m$

wenden wir die Regel an: Wenn man einen Ausdruck $\sqrt[m]{a}$ mit zwei Zahlen n und m nach der Reihe potenziren soll, so ist es einerlei, in welcher Ordnung man dies thut. Wir können daher für die obige Potenz auch setzen

$$[(\sqrt[m]{a})^m]^n.$$

Nach §. 213, 2 ist $(\sqrt[m]{a})^m = a$; also ist der ganze Ausdruck gleich a^n, w. z. b. w.

§. 219. Zusatz.

Die Gleichung des vorhergehenden §.

$$\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$$

läßt auch noch folgende Ausdrucksweisen in Worten zu: 1) Eine Potenz a^n wird durch eine Zahl m radicirt, wenn man den Dignanden a durch die Zahl radicirt. — 2) Eine Wurzel $\sqrt[m]{a}$ wird mit einer Zahl n potenzirt, wenn man den Radicanden a mit der Zahl potenzirt.

Anm. So ist z. B. $\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$

und $\quad (\sqrt[4]{7})^8 = \sqrt[4]{(7^8)} = 7^{\frac{8}{4}} = 7^2 = 49.$

§. 220. Lehrsatz.

Ein Ausdruck wird durch ein Product radicirt, wenn man denselben erst durch den einen Factor radicirt und die entstandene Wurzel durch den anderen Factor ebenfalls radicirt, in Zeichen:

$$\sqrt[m.n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

Bew. Es ist hier zu beweisen, daß

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m.n} = a$$

ist. Auf die Potenz $\quad \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m.n}$

wenden wir die Regel an: Ein Ausdruck $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ wird mit einem Producte m . n potenzirt, wenn man ihn zuerst mit dem einen Factor m potenzirt und die entstandene Potenz mit dem andern Factor n ebenfalls potenzirt. Wir erhalten so

$$\left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n.$$

Statt $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m$ setzen wir nach §. 213, 2 kürzer $\sqrt[n]{a}$; hiernach verwandelt sich der ganze Ausdruck in

$$(\sqrt[n]{a})^n,$$

wofür wir nach demselben §. auch a setzen können, w. z. b. w.

§. 221. Zusatz.

Wenn wir die Gleichung des vorhergehenden §.

$$\sqrt[m.n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

rückwärts lesen, so erhalten wir noch folgende Regel: Eine Wurzel wird durch eine Zahl radicirt, wenn man ihren Exponenten mit der Zahl multiplicirt.

2) Weiter folgt aus dem vorhergehenden §.: Wenn man einen Ausdruck durch zwei Zahlen nach einander radiciren soll, so ist es einerlei, in welcher Ordnung man dies thut, in Zeichen:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}},$$

denn beide Seiten dieser Gleichung sind nach dem vorhergehenden §. gleich

$$\sqrt[m.n]{a}.$$

3) Die so eben aufgestellte Gleichung läßt sich in Worten auch so aussprechen: Eine Wurzel wird durch eine Zahl radicirt, wenn man den Radicanden durch die Zahl radicirt.

Anm. So ist z. B. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{125}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{125}} = \sqrt[2]{5} = 2{,}236\ldots$

Bemerkung.

Die vorhergehenden §§. enthalten die Fundamentalsätze über Wurzeln. Da in einer Wurzel der Radicand eine Summe, Differenz, Product, Quotient, Potenz, Wurzel sein kann, da ferner das nämliche in Hinsicht des Exponenten gelten kann, so würden hieraus möglicher Weise zwölf Sätze hervorgehen. Da indeß schon bei den Potenzen mehrere von diesen Sätzen fehlen, so kann es nicht befremden, daß dasselbe auch bei den Wurzeln der Fall ist. — Als eine Folgerung aus den vorhergehenden Sätzen ergibt sich der folgende, auch in praktischer Hinsicht wichtige Satz.

§. 222. Lehrsatz.

Eine Wurzel aus einer Potenz bleibt ungeändert, wenn man beide Exponenten durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt, in Zeichen:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m.p]{a^{n.p}}.$$

Bew. Denn indem man den Wurzelexponenten m mit der Zahl p multiplicirt, so wird der ganze Ausdruck durch p radicirt und indem man den Potenzexponenten n mit p multiplicirt, wird der Ausdruck mit p potenzirt. Demnach ist der Ausdruck ungeändert geblieben, weil man ihn mit derselben Zahl radicirt und potenzirt hat.

§. 223. Zusatz.

Man benutzt diesen Satz, wenn man Wurzeln, welche verschiedene Exponenten haben, mit einander multipliciren oder dividiren soll. Da nämlich

Wurzeln mit gleichen Exponenten multiplicirt oder dividirt werden, wenn man ihre Radicanden multiplicirt oder dividirt, so hat man die gegebenen Wurzeln, wenn sie verschiedene Exponenten haben, vorher auf einen gleichen Exponenten zu bringen. Es sei z. B.

$$\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[8]{a^3}$$

gegeben; so erkennt man leicht, daß beide Wurzeln sich auf den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten 40 bringen lassen. Man erhält so für den obigen Ausdruck

$$\sqrt[40]{a^{16}} \cdot \sqrt[40]{a^{15}} = \sqrt[40]{a^{16} \cdot a^{15}} = \sqrt[40]{a^{31}}.$$

§. 224. Erklärung.

Wir haben im Vorhergehenden bei allen Wurzelausdrücken (stillschweigend) vorausgesetzt, daß die Wurzel sich vollständig ausziehen lasse. Dies ist jedoch nur bei den wenigsten Wurzeln wirklich der Fall; bei weitem die meisten Wurzeln sind **irrational**; d. h. es lassen sich nur Näherungswerthe, beliebig enge Grenzen, angeben, zwischen denen sie liegen. — Von diesen nicht vollständig darstellbaren, sondern nur in der Idee existirenden irrationalen Wurzeln gelten jedoch dieselben Sätze wie von den rationalen Wurzeln.

*§. 224. Zusatz.

In dem dritten Abschnitte haben wir gesehen, wie man für die zweite und dritte Wurzel Näherungswerthe findet. Die vierte Wurzel kann (näherungsweise) erhalten werden, indem man zweimal nach einander die Quadratwurzel auszieht. Die fünfte Wurzel ließe sich allerdings nach einer ähnlichen Formel wie die dritte ausziehen; das Verfahren ist jedoch allzu weitläufig, um praktische Anwendung zu finden. Dasselbe gilt von noch höheren Wurzeln*). Man zieht diese am bequemsten mit Hilfe der Logarithmentafel näherungsweise aus. Um indeß, abgesehen hiervon, von vorn herein zu zeigen, daß für jede irrationale Wurzel Näherungswerthe existiren, welche der wahren Wurzel so nahe gebracht werden können, als man will, kann folgende Ueberlegung dienen.

Es sei $\sqrt[m]{a}$ irrational, und es sollen für dieselbe zwei Näherungswerthe gefunden werden, welche sich von einander, also auch von der wahren Wurzel um weniger als $\frac{1}{z}$ unterscheiden. Man denke sich alle möglichen Brüche, welche zum Nenner z haben, $\frac{0}{z}, \frac{1}{z}, \frac{2}{z}, \frac{3}{z}$ u. s. w. mit m potenzirt, so muß man endlich dahin gelangen, daß diese Potenzen größer als a werden.

Ist nun $\left(\frac{x}{z}\right)^m$ noch kleiner als a, aber $\left(\frac{x+1}{z}\right)^m$ schon größer als a, so sind $\frac{x}{z}$ und $\frac{x+1}{z}$ zwei Grenzen, welche die gesuchte Wurzel einschließen und sich nur um $\frac{1}{z}$ von einander, also um noch weniger von der irrationalen Wurzel selbst unterscheiden.

Weiter unten (§. 287) werden wir sehen, daß die Potenz eines in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruches allemal wieder ein Bruch ist; es kann daher die Wurzel aus einer ganzen Zahl niemals einem Bruche gleich sein; dieselbe ist entweder einer ganzen Zahl gleich oder irrational.

*) Mit Ausnahme derjenigen, welche keine andern einfachen Factoren als 2 und 3 enthalten.

Zur Einübung der vorhergehenden Sätze können folgende **Beispiele** dienen:

1) $\sqrt[5]{a^{10}} = a^2$

2) $\sqrt[4]{a^{24}} = a^6$

3) $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$

4) $\sqrt[8]{a^{20}} = \sqrt[2]{a^5}$

5) $\sqrt[2]{25a^6} = 5a^3$

6) $\sqrt[3]{8a^3b^6} = 2ab^2$

7) $\sqrt[4]{16a^8b^{12}} = 2a^2b^3$

8) $\sqrt[5]{a^{15}b^5c^{10}} = a^3bc^2$

9) $\sqrt[2]{\frac{4a^2}{9b^4}} = \frac{2a}{3b^2}$

10) $\sqrt[3]{\frac{27a^6b^3c^9}{d^{15}}} = \frac{3a^2bc^3}{d^5}$

11) $\sqrt[3]{a^6b^2} = a^2\sqrt[3]{b^2}$

12) $\sqrt[5]{a^4b^{15}} = b^3\sqrt[5]{a^4}$

13) $\sqrt{\frac{a}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a}$

14) $\sqrt[3]{\frac{a^9b^2}{c^6}} = \frac{a^3}{c^2}\sqrt[3]{b^2}$

15) $\sqrt[4]{a^{11}} = a^2\sqrt[4]{a^3}$

16) $\sqrt[5]{a^{27}} = a^5\sqrt[5]{a^2}$

17) $\sqrt[3]{a^8b^4} = a^2b\sqrt[3]{a^2b}$

18) $\sqrt[6]{a^{15}} = a^2\sqrt{a}$

19) $\sqrt[4]{a^9b^8} = a^2b^2\sqrt[4]{a}$

20) $\sqrt[12]{a^{15}b^{24}} = ab^2\sqrt[4]{a}$

21) $\sqrt{\frac{a^3}{b^5}} = \frac{a}{b^2}\sqrt{\frac{a}{b}}$

22) $\sqrt[3]{\frac{24a^3}{125b^4}} = \frac{2a}{5b}\sqrt[3]{\frac{3}{b}}$

23) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}} = \sqrt[3]{a^2}$

24) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^9}} = \sqrt[10]{a^3}$

25) $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

26) $3a\sqrt{5b} = \sqrt{45a^2b}$

27) $a\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^4}$

28) $a^2\sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a^{13}}$

29) $2a\sqrt{3a} = \sqrt{12a^3}$

30) $3a^5\sqrt[3]{2a^2} = \sqrt[3]{54a^{17}}$

31) $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

32) $\frac{a^2}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{a^7}$

33) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

34) $\frac{\sqrt{6a}}{3a^2} = \sqrt{\frac{2}{3a^3}}$

35) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a^3} = \sqrt[8]{a^5}$ *)

36) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[12]{a^5} = a\sqrt[12]{a}$

37) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt{a}$

38) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^7} = \sqrt[6]{a^5}$

39) $\sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^5}$

40) $\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a\sqrt[15]{a^4}$

41) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[9]{a^4} = a\sqrt[18]{a^5}$

42) $\sqrt[12]{a^7} \cdot \sqrt[8]{a^3} = \sqrt[24]{a^{23}}$

43) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[4]{a}$

44) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a^5}$

---

*) **Vergleiche** §. 223.

45) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[12]{a^5}} = \sqrt[4]{a}$ 46) $\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[20]{\frac{1}{a^7}}$

47) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[2]{3} = \sqrt[6]{108}$ 48) $4 \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{16}} = \sqrt[3]{20}$

49) $a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}$ 50) $a : \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{a^2 b}$

51) $\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$ 52) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} : \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}$

53) $\frac{5a}{3b}\sqrt[4]{\frac{6b}{125a^3}} = \sqrt[4]{\frac{10a}{27b^3}}$ 54) $\sqrt[3]{\frac{2a}{3b}} \cdot \sqrt[6]{\frac{32a^5}{27b^3}} = \frac{2a}{3b}\sqrt[6]{2a}$

55) $\frac{6a}{5b^2} : \sqrt[3]{\frac{3a}{10b}} = \frac{2}{b}\sqrt[3]{\frac{18a^2}{25b^2}}$ 56) $\sqrt{\frac{2a}{7b}} : 12ab = \frac{1}{6b}\sqrt{\frac{1}{14ab}}$

Anschließend an das Vorstehende und in Wiederholung und Fortsetzung des schon früher (§. 142, b) Geübten wollen wir noch zeigen, wie man zu verfahren hat, um den Nenner eines Bruches rational zu machen, wenn in demselben Wurzeln vorkommen. Enthält der Nenner nur Quadratwurzeln und besteht derselbe aus nicht mehr als drei Gliedern, ist also ein Bruch von der Form

$$\frac{a}{m\sqrt{b} + n\sqrt{c} + p\sqrt{d}}$$

gegeben, wo die Coefficenten m, n p eben sowohl positive als negative Zahlen vorstellen können, so multiplicire man Zähler und Nenner mit

$$m\sqrt{b} - (n\sqrt{c} + p\sqrt{d});$$

dann ergibt sich

$$\frac{a\,(m\sqrt{b} - n\sqrt{c} - p\sqrt{d})}{m^2 b - n^2 c - p^2 d - 2np\sqrt{(cd)}}.$$

Da in diesem Bruche der Nenner nur noch eine einzige Wurzel enthält, so läßt sich derselbe nach dem schon früher angewandten Verfahren rational machen. § 196

Ist ferner ein Bruch wie der folgende

$$\frac{a}{m\sqrt{b} + n\sqrt{c} + p\sqrt{d} + q\sqrt{f}}$$

gegeben, dessen Nenner aus vier Gliedern besteht, so multiplizieren wir, indem wir je zwei und zwei Glieder zusammenziehen, Zähler und Nenner mit $(m\sqrt{b} + n\sqrt{c}) - (p\sqrt{d} + q\sqrt{f})$; wir erhalten so

$$\frac{a\,(m\sqrt{b} + n\sqrt{c} - p\sqrt{d} - q\sqrt{f})}{m^2 b + n^2 c - p^2 d - q^2 f + 2mn\sqrt{(bc)} - 2pq\sqrt{(df)}}.$$

Da jetzt der Nenner nur noch zwei Quadratwurzeln erhält, so ist dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt. Das angewendete Verfahren reicht jedoch im allgemeinen nicht mehr aus, wenn der Nenner aus mehr als vier Gliedern besteht und mehr als drei Glieder Quadratwurzeln sind.

Der Nenner des Bruches kann auch rational gemacht werden, wenn derselbe höhere Wurzeln enthält, jedoch nur aus zwei Gliedern besteht. Haben zunächst diese beiden Glieder ungleiche Vorzeichen, so wird sich der gegebene Bruch auf die Form

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{c}}$$

zurückführen lassen, da Wurzeln mit ungleichen Exponenten sich (nach §. 323) auf einen gleichen Exponenten und etwaige rationale Factoren (nach §. 213) unter das Wurzelzeichen bringen lassen. Setzen wir nun um größerer Kürze der Darstellung willen $\sqrt[n]{b} = x$ und $\sqrt[n]{c} = y$, und multipliciren wir Zähler und Nenner mit $b - c = x^n - y^n$, so verwandelt sich der gegebene Bruch in

$$\frac{a(x^n - y^n)}{(b - c)(x - y)},$$

und dieser Bruch ist (nach §. 114, Beisp. 13) gleich

$$\frac{a}{b - c}\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 \ldots\ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right).$$

In diesem Bruche enthält nur der Zähler irrationale Glieder, während der Nenner von solchen gänzlich frei ist.

Sind die beiden Glieder des Nenners mit dem nämlichen Vorzeichen behaftet, ist also ein Bruch von der Form $\frac{a}{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}$ gegeben, so setzen wir $\sqrt[n]{b} = + x$ und $\sqrt[n]{c} = - y$; dann ist $b = x^n$ und $c = + y^n$ oder $- y^n$, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Im ersteren Falle ist

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}} = \frac{a}{b - c} \cdot \frac{x^n - y^n}{x - y};$$

im anderen Falle ist

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}} = \frac{a}{b + c} \cdot \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

In beiden Fällen aber läßt sich zufolge des schon vorher Angeführten der gegebene Bruch in einen solchen, dessen Nenner nur rationale Glieder enthält, umwandeln.

Wir fügen keine Uebungsbeispiele bei, weil man von derartigen Umformungen nur selten Gebrauch macht. Wir haben uns hauptsächlich nur die Aufgabe gestellt, die Möglichkeit dieser Umformungen zu zeigen.

§. 225, a. Lehrsatz.

Jede Wurzel aus Null ist wieder gleich Null, und eben so ist jede Wurzel aus Eins wieder gleich Eins, in Zeichen:

$$\sqrt[m]{o} = o \text{ und } \sqrt[m]{1} = 1.$$

Bew. Die Richtigkeit dieser Gleichungen folgt unmittelbar aus §. 207.

1) Größeres durch Gleiches radicirt gibt Größeres. Ist z. B. $a > b$, so ist auch $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$.

2) Die Wurzel aus einem unächten Bruche, (welcher > 1 ist), ist um so kleiner, je größer der Wurzelexponent ist. — Ist $a > 1$ und $m > n$, so ist $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$.

3) Dagegen wird die Wurzel aus einem ächten Bruche um so größer, je größer der Wurzelexponent ist.

Bew. zu 1). Wäre $\sqrt[m]{a} \overline{\overline{<}} \sqrt[m]{b}$, so müßte nach §. 209 auch $(\sqrt[m]{a})^m \overline{\overline{<}} (\sqrt[m]{b})^m$, d. h. $a \overline{\overline{<}} b$ sein.

Bew. zu 2) und 3). Um die Wurzeln $\sqrt[m]{a}$ und $\sqrt[n]{a}$ bequemer vergleichen zu können, bringe man dieselben auf einen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten m . n; nach §. 222 ist

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m.n]{a^n} \text{ und } \sqrt[n]{a} = \sqrt[m.n]{a^m}.$$

Ist nun zunächst $a > 1$, so ist nach §. 209

$$a^n < a^m,$$

folglich auch

$$\sqrt[m.n]{a^n} < \sqrt[m.n]{a^m},$$

d. h.

$$\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}.$$

Ist aber $a < 1$, so ist

$$a^n > a^m,$$

also auch

$$\sqrt[m.n]{a^n} > \sqrt[m.n]{a^m},$$

d. h.

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}.$$

*§. 225, b. Lehrsatz.

Ist m eine ganze Zahl und x eine sehr kleine positive oder negative Zahl, so ist annähernd

$$1)\quad \frac{1}{1 + x} = 1 - x \text{*)}$$

$$2)\quad (1 + x)^m = 1 + mx$$

$$3)\quad \sqrt[m]{1 + x} = 1 + \frac{x}{m},$$

wo in Betreff der zweiten Gleichung vorausgesetzt ist, daß auch mx noch einer sehr kleinen Zahl gleich ist.

Bew. zu 1). Eigentlich ist

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + \frac{x^2}{1 + x}.$$

Ist nun x ein sehr kleiner Bruch, so ist x^2 und eben so $\frac{x^2}{1 + x}$ auch in Vergleich gegen x eine sehr kleine Zahl; (ist z. B. $x = + \frac{1}{1000}$ oder $x = - \frac{1}{1000}$, so ist im ersteren Falle $\frac{x^2}{1 + x} = \frac{1}{1001} . \frac{1}{1000}$, im anderen Falle $= \frac{1}{999} . \frac{1}{1000}$), so daß wir annähernd setzen können $\frac{1}{1 + x} = 1 - x$.

Bew. zu 2). Bekanntlich ist

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Ist nun x ein sehr kleiner Bruch, so ist das dritte Glied x^2 auch in Vergleich gegen das zweite Glied 2x eine sehr kleine Zahl. (Ist z. B. $x = 0{,}001$, so ist $2x = 0{,}002$ und $x^2 = 0{,}000001$.) Wir werden daher annähernd setzen dürfen $(1 + x)^2 = 1 + 2x$.
Multipliciren wir diese Gleichung mit $1 + x$, so erhalten wir

$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 2x^2,$$

---

*) Wir haben diese Gleichung, welche schon viel früher hätte erwiesen werden können, wegen ihrer nahen Verwandtschaft mit den beiden folgenden hier aufgeführt. Alle drei Gleichungen sind von geringerer theoretischer Wichtigkeit, aber für verschiedentliche Anwendungen der Arithmetik auf naturwissenschaftliche Gegenstände (z. B. bei Formeln, welche den Ausdehnungscoefficienten für die Wärme enthalten), unentbehrlich.

wofür wir zufolge der eben angeführten Gründe auch näherungsweise setzen können $(1 + x)^3 = 1 + 3x$.

Auf demselben Wege fortfahrend erhalten wir die annähernd richtigen Gleichungen

$$(1 + x)^4 = 1 + 4x$$

$$(1 + x)^5 = 1 + 5x$$

u. s. w., überhaupt $(1 + x)^m = 1 + mx$.

Bew. zu 3). Zufolge des eben Erwiesenen ist

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + x,$$

folglich

$$\sqrt[m]{1 + x} = 1 + \frac{x}{m}.$$

In Betreff der Gleichung (2) haben wir oben die Bedingung aufgestellt, daß auch mx einer sehr kleinen Zahl gleich sein soll, wonach also m nur eine mäßig große ganze Zahl bedeuten darf. Wenn dagegen m eine sehr große Zahl, (nicht vielmal kleiner als $\frac{1}{x}$) sein sollte, so würde diese Gleichung auch nicht mehr für annähernd richtig gelten können, da in der obigen Entwicklung mit der Ableitung jeder folgenden Gleichung aus der vorhergehenden sich auch die Zahl der begangenen Fehler vermehrt und die Summe sehr vieler sehr kleiner Zahlen nicht nothwendig einer sehr kleinen Zahl gleich ist.

Für die Gleichung (3) ist dagegen jene Bedingung von selbst erfüllt, da $m \cdot \frac{x}{m} = x$, also vermöge der Voraussetzung eine sehr kleine Zahl ist. — Zufolge dieser Gleichung ist z. B. näherungsweise

$$\sqrt{1{,}0017} = 1{,}00085; \qquad \sqrt[3]{1{,}002} = 0{,}00066;$$

ferner da x sowohl positiv als negativ angenommen werden kann,

$$\sqrt{0{,}996} = \sqrt{1 - 0{,}004} = 1 - 0{,}002 = 0{,}998$$

$$\sqrt[3]{0{,}9987} = \sqrt[3]{1 - 0{,}0013} = 1 - 0{,}000433 = 0{,}999567 \text{ u. dgl. m.}$$

C. Von den gebrochenen und Differenz-Potenzen.

§. 226. Erklärung.

Die in den vorhergehenden §§. über Wurzeln erwiesenen Sätze gelten unter der Voraussetzung, daß alle Radicanden positive und die Exponenten positive ganze Zahlen sind, ganz allgemein, welche Werthe man auch übrigens den Radicanden und Exponenten beilegen mag. Eine Ausnahme von dieser Allgemeingültigkeit macht jedoch §. 217, indem die Gleichung

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

nur unter der Voraussetzung erwiesen ist und erwiesen werden konnte, daß der Wurzelexponent m in dem Potenzexponenten n aufgeht. Denn wenn diese Bedingung nicht erfüllt wäre, würde $\frac{n}{m}$ eine gebrochene Zahl und daher $a^{\frac{n}{m}}$ ein Ausdruck sein, welcher im Vorhergehenden noch gar keine Bedeutung erhalten hat*). Man würde daher bei Rechnungen in allgemeinen Zeichen von der in vieler Hinsicht so vortheilhaften Regel des §. 217 keinen allgemeinen Gebrauch machen können. Um nun hieran nicht behindert zu sein, pflegt man auch in solchen Fällen, in denen m in n nicht aufgeht,

*) z. B. $a^{\frac{7}{4}}$. Eine Zahl $\frac{7}{4}$ mal mit sich selbst multipliciren, würde keinen Sinn haben.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

zu setzen. Man nennt aber den Ausdruck

$$a^{\frac{n}{m}},$$

(in welchem a eine positive ganze oder gebrochene Zahl und m und n positive ganze Zahlen vorstellen), eine gebrochene Potenz und versteht hierunter in Uebereinstimmung mit §. 217 nichts anderes als $\sqrt[m]{a^n}$. Die eigentliche Potenz, welche zum Exponenten eine positive ganze Zahl hat, nennt man zum Unterschiede von der gebrochenen Potenz eine ganze Potenz.

*§. 227. Lehrsatz.

Ist
$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q},$$
so ist auch
$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}\text{*)}$$

Bew. Nach der Voraussetzung ist
$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q},$$
daher nach §. 156 $mq = np$; da nun mq und np ganze Zahlen sind, so ist folglich
$$a^{mq} = a^{np},$$
daher auch
$$\sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[nq]{a^{np}}$$
und vermöge §. 222
$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$$
d. h.
$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

*§. 228. Zusatz.

Da 1 gleich einem Bruche mit gleichem Zähler und Nenner, also $1 = \frac{m}{m}$ ist, so ist
$$a^1 = a^{\frac{m}{m}} = \sqrt[m]{a^m} = a.$$

*§. 229. Lehrsatz.

Auch von den gebrochenen Potenzen gelten die in §. 204 bis §. 206 über ganze Potenzen erwiesenen Sätze, welche wir hier nur kurz in Zeichen wiederholen:

1) $(a \,.\, b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \,.\, b^{\frac{m}{n}}$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

3) $a^{\frac{m}{n}} \,.\, a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$

4) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$

5) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$

6) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}$

wobei jedoch in der Gleichung (4) vorausgesetzt ist, daß $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$ ist.

---

*) Man würde sehr irren, wenn man diesen Satz als sich von selbst verstehend und den Beweis für überflüssig halten wollte.

Bew.

1) $(a\,.\,b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a\,.\,b)^m} = \sqrt[n]{a^m\,.\,b^m} = \sqrt[n]{a^m}\,.\,\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}}\,.\,b^{\frac{m}{n}}$;

2) kann in ganz ähnlicher Art wie (1) erwiesen werden;

3) $a^{\frac{m}{n}}\,.\,a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\,.\,\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\,.\,\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq}\,.\,a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$;

4) wird entweder eben so wie (3) erwiesen oder aus (3) so wie §. 205, b aus §. 205, a abgeleitet;

5) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}}$;

6) folgt eben so aus (5), wie §. 206, b aus §. 206, a.

Uebungsbeispiele.

1) $8^{\frac{2}{3}} = 4$

2) $4^{\frac{5}{2}} = 32$

3) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{8}{27}$

4) $\left(15\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\frac{1}{2}$

5) $a^{\frac{1}{2}}\,.\,a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}}$

6) $a^{\frac{1}{6}}\,.\,a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$

7) $a^{\frac{2}{5}}\,.\,a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{23}{20}}$

8) $a^{\frac{1}{3}}\,.\,a^{\frac{1}{4}}\,.\,a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{59}{60}}$

9) $a^2 : a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{4}}$

10) $a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}}$

11) $a^{\frac{1}{2}} : a = 1 : a^{\frac{1}{2}}$

12) $a^{\frac{3}{8}} : a^{\frac{5}{6}} = 1 : a^{\frac{11}{24}}$

13) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^4 = a^{\frac{8}{3}}$

14) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{8}} = a^{\frac{15}{32}}$

§. 230. Erklärung.

Wie wir in §. 229 gesehen haben, sind die in den §. 204 bis 206 über ganze Potenzen erwiesenen Sätze auch dann noch richtig, wenn die Exponenten m, n u. s. w. beliebige Brüche bezeichnen. Während aber die übrigen Sätze ganz allgemein gelten, ist bei dem Beweise der Gleichung des §. 205, b

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

und eben so in der Gleichung (4) des §. 229 ausdrücklich vorausgesetzt, daß der Exponent des Dividendus größer ist, als der Exponent des Divisors, da entgegengesetzten Falles a^{m-n} gar keine Bedeutung haben würde. Aus den in §. 226 angezeigten Gründen bedient man sich jedoch des Zeichens

$$a^{m-n}$$

in welchem a, m und n sämmtlich positive ganze oder gebrochene Zahlen vorstellen, auch dann noch, wenn die angegebene Bedingung nicht erfüllt ist, und nennt diesen Ausdruck eine Differenz-Potenz, es mag nun $m > n$ oder $m = n$ oder $m < n$ sein. Man versteht aber darunter in Uebereinstimmung mit §. 205, b nichts anderes, als den Quotienten

$$\frac{a^m}{a^n}.$$

*§. 231. Lehrsatz.

Ist

$$m - n = p - q,$$

so ist auch

$$a^{m-n} = a^{p-q}.$$

Bew. Aus der Voraussetzung

$$m - n = p - q$$

folgt

$$m + q = n + p,$$

und hieraus, da $m + q$ und $n + p$ positive Zahlen sind,

$$a^{m+q} = a^{n+p}$$

oder

$$a^m \cdot a^q = a^n \cdot a^p,$$

also auch

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^p}{a^q}$$

oder

$$a^{m-n} = a^{p-q}.$$

*§. 232. Lehrsatz.

Auch von Differenzpotenzen gelten die in §. 204 bis 206 erwiesenen Sätze:

1) $(a \cdot b)^{m-n} = a^{m-n} \cdot b^{m-n}$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} = \frac{a^{m-n}}{b^{m-n}}$

3) $a^{m-n} \cdot a^{p-q} = a^{(m-n)+(p-q)} = a^{(m+p)-(n+q)}$

4) $a^{m-n} : a^{p-q} = a^{(m-n)-(p-q)} = a^{(m+q)-(n+p)}$

5) $(a^{m-n})^{p-q} = a^{(m-n)\cdot(p-q)} = a^{(mp+nq)-(mq+np)}$

6) $(a^{m-n})^{p-q} = (a^{p-q})^{m-n}$.

Beweis.

1) $(a \cdot b)^{m-n} = \frac{(a \cdot b)^m}{(a \cdot b)^n} = \frac{a^m \cdot b^m}{a^n \cdot b^n} = \frac{a^m}{a^n} \cdot \frac{b^m}{b^n} = a^{m-n} \cdot b^{m-n}$.

2) kann in ähnlicher Art, wie (1) erwiesen werden.

3) $a^{m-n} \cdot a^{p-q} = \frac{a^m}{a^n} \cdot \frac{a^p}{a^q} = \frac{a^{m+p}}{a^{n+q}} = a^{(m+p)-(n+q)}$.

4) wird entweder eben so erwiesen wie (3) oder aus (3) in derselben Art wie §. 205, b aus §. 205, a abgeleitet.

5) $(a^{m-n})^{p-q} = (a^m : a^n)^{p-q} = \frac{(a^m : a^n)^p}{(a^m : a^n)^q} = \frac{a^{mp} : a^{np}}{a^{mq} : a^{nq}}$

$= \frac{a^{mp} \cdot a^{nq}}{a^{mq} \cdot a^{np}} = \frac{a^{mp+nq}}{a^{mq+np}} = a^{(mp+nq)-(mq+np)}$.

6) folgt leicht aus (5).

§. 233, a. Lehrsatz.

1) $a^0 = 1$.

2) $a^{-m} = \frac{1}{a^{+m}}$.

Bew. 1) Da Null eine Differenz mit gleichem Minuenden und Subtrahenden vorstellt, so können wir statt Null $m - m$ setzen. Demnach ist

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1.$$

2) Da $-m = 0 - m$ ist, so ist

$$a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}.$$

§. 233, b. Zusatz.

Bedeutet m eine beliebige positive oder negative Zahl Null, so ist allemal

$$1^m = 1,$$

wie leicht aus dem vorhergehenden §. und den §§. 207 und 225, a folgt.

Desgleichen ist $0^m = 0$,
wenn m eine positive Zahl bedeutet; ist dagegen $m = 0 = p - p$, wo p eine positive Zahl bedeuten soll, so ist

$$0^m = 0^{p-p} = \frac{0^p}{0^p} = \frac{0}{0};$$

und ist m negativ $= - p$, so ist

$$0^m = 0^{-p} = \frac{1}{0^p} = \frac{1}{0}.$$

In diesen beiden Fällen stellt sich also die Potenz 0^m als eine algebraisch unzulässige Form heraus.

*§. 234. Zusatz.

1) Im Vorhergehenden ist der Begriff der Potenz a^m in der Art erweitert worden, daß der Exponent m sowohl einer ganzen als einer gebrochenen, sowohl einer positiven als auch einer negativen Zahl gleich sein kann. Eine ähnliche Erweiterung wäre auch in Hinsicht der Wurzel sehr wohl möglich, erscheint aber darum als überflüssig, weil jeder Wurzelausdruck sich leicht in eine gebrochene Potenz verwandeln läßt. Wir werden daher auch im Folgenden durchgehends annehmen, daß in der Wurzel $\sqrt[m]{a}$ der Wurzelexponent m allemal eine positive ganze Zahl vorstellt.

2) In §. 217 haben wir gesehen, daß aus einer ganzen Potenz die Wurzel gezogen wird, wenn man ihren Exponenten durch den Wurzelexponenten dividirt, daß also, wenn m und n positive ganze Zahlen bedeuten,

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

ist. Dieselbe Regel gilt jedoch auch für gebrochene und Differenzpotenzen, und die vorstehende Gleichung ist auch dann noch richtig, wenn n eine gebrochene oder negative Zahl bedeutet. — Denn wenn wir die rechte Seite der Gleichung mit dem Wurzelexponenten m potenziren, so erhalten wir die Potenz

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m.$$

Nach §. 229 und 232 wird auch eine gebrochene oder Differenzpotenz mit einer Zahl potenzirt, wenn man ihren Exponenten mit der Zahl multiplicirt; folglich ist

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^{\frac{n}{m} \cdot m} = a^n.$$

Demnach ist $$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Dieser in den Lehrbüchern gewöhnlich fehlende Satz ist später in der Lehre von den Logarithmen (§. 242) nicht wohl zu entbehren und findet auch außerdem Anwendung.

Uebungsbeispiele.

1) $5^{-2} = \frac{1}{25}$ 2) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ 4) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{9}$

5) $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$ 6) $81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$

7) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = 5$ 8) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} = 16$

9) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{64}{27}$ 10) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = \frac{27}{8}$

11) $a^{-5} \cdot a^{+8} = a^{+3}$ 12) $a^{-4} \cdot a^{-3} = a^{-7}$

13) $a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{5}{6}}$ 14) $a^{+\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{3}{5}} = a^{+\frac{1}{15}}$

15) $\frac{a^{+5}}{a^{+9}} = a^{-4}$ 16) $\frac{a^{-3}}{a^{+7}} = a^{-10}$

17) $\frac{a^{-5}}{a^{-12}} = a^{+7}$ 18) $\frac{a^{+4}}{a^{-2}} = a^{+6}$

19) $\frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{2}} = a^{-\frac{5}{4}}$ 20) $\frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{7}{8}}} = a^{-\frac{1}{8}}$

21) $(a^{-5})^{+3} = a^{-15}$ 22) $(a^{-7})^{-2} = a^{+14}$

23) $\left(a^{+\frac{3}{4}}\right)^{-8} = a^{-6}$ 24) $\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = a^{+\frac{1}{3}}$

25) $\sqrt[3]{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{1}{4}}$ 26) $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{6}}$

27) $\sqrt[6]{a^{-4}} = a^{-\frac{2}{3}}$ 28) $\sqrt[5]{a^{-\frac{3}{2}}} = a^{-\frac{3}{10}}$.

*§. 235. Lehrsatz.

Von den gebrochenen und Differenz-Potenzen gelten auch noch folgende Sätze:

1) Größeres mit einem gleichen positiven Exponenten potenzirt gibt Größeres. Ist also m eine absolute ganze oder gebrochene Zahl und

$$a > b,$$

so ist auch

$$a^{+m} > b^{+m}.$$

2) Größeres mit einem gleichen negativen Exponenten potenzirt gibt Kleineres. — Ist

$$a > b,$$

so ist

$$a^{-m} < b^{-m}.$$

3) Die Potenz eines unächten Bruches, welcher > 1 ist, ist allemal um so größer, je größer der Exponent ist. Sind nämlich m und n beliebige positive oder negative Zahlen oder Null, und ist

$$a > 1$$

und

$$m > n,$$

so ist auch

$$a^m > a^n.$$

4) Dagegen ist die Potenz eines ächten Bruches um so kleiner, je größer der Exponent ist. Ist nämlich

$$a < 1$$

und

$$m > n,$$

so ist

$$a^m < a^n.$$

Bew. 1) Ist zunächst m eine ganze Zahl, so ist der Satz schon in §. 209 erwiesen; ist aber m eine gebrochene Zahl, z. B. $= \frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen vorstellen, so ist, da

$$a > b$$

vorausgesetzt ist, nach §. 209 $a^p > b^p$

folglich auch nach §. 225,a $\sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{b^p}$,

oder $a^{\frac{p}{q}} > b^{\frac{p}{q}}$,

d. h. $a^{+m} > b^{+m}$.

2) Da $a > b$

vorausgesetzt ist, so ist nach (1)

$$a^{+m} > b^{+m},$$

folglich $\frac{1}{a^{+m}} < \frac{1}{b^{+m}}$,

d. h. $a^{-m} < b^{-m}$.

3) Nach der Voraussetzung ist $m > n$; man setze $m = n + x$, wo x eine positive Zahl vorstellt. Da

$$a > 1$$

vorausgesetzt ist, so ist nach (1)

$$a^{+x} > 1^{+x},$$

d. h. $a^{+x} > 1$,

folglich auch $a^n \,.\, a^{+x} > a^n \,.\, 1$

oder $a^{n+x} > a^n$

oder $a^m > a^n$.

4) Ist dagegen $a < 1$,

so ist nach (1) $a^x < 1$,

folglich $a^n \,.\, a^x < a^n$,

d. h. $a^{n+x} < a^n$

oder $a^m < a^n$.

*§. 236. Zusatz.

1) Sind a und b positive Zahlen, ist m von Null verschieden, (positiv oder negativ), und ist

$$a^m = b^m,$$

so ist auch $a = b$.

2) Ist ferner a positiv, aber nicht = 1, und sind m und n beliebig positive oder negative Zahlen, und ist

$$a^m = a^n,$$

so ist auch $m = n$.

Bew. 1) Wäre $a > b$, so müßte auch, wenn m positiv ist, $a^m > b^m$ sein; wenn aber m negativ ist, so müßte $a^m < b^m$ sein, welches beides gegen die Voraussetzung streitet.

2) Wenn $m > n$ wäre, so müßte auch, wenn a ein unächter Bruch ist, $a^m > a^n$, wenn aber a ein ächter Bruch ist, $a^m < a^n$ sein, was beides der Voraussetzung widerspricht.

D. Von den Logarithmen.

§. 237. Erklärung.

Wenn man sich in der Gleichung

$$k^m = a$$

in welcher a und k positive Zahlen vorstellen sollen, während der Exponent m sowohl positiv als negativ oder gleich Null sein kann, a und k als gegeben, aber m als gesucht denkt, so wird m der Logarithmus von a für k genannt. Man versteht also unter einem Logarithmus einen ge-

suchten Exponenten. Die gegebene Zahl k, welche mit dem gesuchten Exponenten potenzirt werden soll, wird die **Basis** und die Zahl a, welche als Potenz erhalten werden soll, wird der **Logarithmand** genannt. — Im Folgenden werden wir durchgehends annehmen, daß alle in Betracht zu ziehenden Logarithmen die nämliche Basis, welche wir mit k bezeichnen wollen, haben. Statt Logarithmus a schreibt man gewöhnlich abgekürzt

$$\log a.$$

Am häufigsten nimmt man für die Basis k die Zahl 10 an. Hiernach ist also

$$\log 10 = 1, \text{ weil } 10^1 = 10 \text{ ist},$$
$$\log 100 = 2, \quad " \quad 10^2 = 100 \quad "$$
$$\log 1000 = 3, \quad " \quad 10^3 = 1000 \quad " \quad \text{u. s. w.}$$

Man kann jedoch für die Basis auch jede beliebige andere positive Zahl annehmen; nur 1 ist hierzu nicht geeignet, da 1^m, was auch m bedeuten mag, immer wieder $= 1$ ist.

*§. 238. Zusatz.

1) Aus §. 236 folgt, daß log a für eine gegebene Basis k nur einer einzigen Zahl, nicht zwei verschiedenen Zahlen gleich sein kann.

2) Zufolge der obigen Erklärung sagt die Gleichung

$$1) \quad \log a = x,$$

nichts anderes aus, als die Gleichung

$$2) \quad k^x = a.$$

3) Setzt man aus (1) $x = \log a$ in die Gleichung (2) ein, so verwandelt sich dieselbe in $\quad k^{\log a} = a.$

4) Setzt man dagegen aus (2) $a = k^x$ in die Gleichung (1) ein, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\log k^x = x.$$

§. 239. Lehrsatz.

Der Logarithmus eines Productes wird erhalten, wenn man die Logarithmen der einzelnen Factoren addirt, in Zeichen:

$$1) \quad \log (a \,.\, b) = \log a + \log b;$$
$$2) \quad \log (a \,.\, b \,.\, c) = \log a + \log b + \log c \text{ u. s. w.}$$

Bew. 1) Es sei

$$\log a = x \text{ und } \log b = y,$$

d. h. $\quad a = k^x \text{ und } b = k^y;$

so ist $\quad a \,.\, b = k^x \,.\, k^y,$

oder da Potenzen mit gleichem Dignanden multiplizirt werden, wenn man ihre Exponenten addirt, $\quad a \,.\, b = k^{x+y}.$

Demnach ist $\quad \log (a \,.\, b) = x + y = \log a + \log b.$

Die Gleichung (2) wird entweder eben so erwiesen oder leicht aus (1) abgeleitet.

§. 240. Lehrsatz.

Der Logarithmus eines Quotienten wird erhalten, wenn man den Logarithmus des Divisors von dem des Dividendus subtrahirt, in Zeichen:

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Bew. Es sei $\quad \log a = x \text{ und } \log b = y,$

d. h. $\quad a = k^x \text{ und } b = k^y;$

so ist $\quad \frac{a}{b} = \frac{k^x}{k^y},$

oder da Potenzen mit gleichem Dignanden durch einander dividirt werden, wenn man ihre Exponenten von einander subtrahirt,

$$\frac{a}{b} = k^{x-y}.$$

Demnach ist $$\log \frac{a}{b} = x - y = \log a - \log b.$$

§. 241. Lehrsatz.

Der Logarithmus einer Potenz wird erhalten, indem man den Logarithmus des Dignanden mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt, in Zeichen:

$$\log a^m = m \log a.$$

Bew. Es sei $$\log a = x,$$
d. h. $$a = k^x;$$
so ist $$a^m = (k^x)^m.$$

Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man ihren Exponenten mit der Zahl multiplicirt; hiernach verwandelt sich die vorstehende Gleichung in $$a^m = k^{mx},$$
woraus sich ergibt

$$\log a^m = m \, . \, x = m \, . \log a.$$

Ist m eine ganze Zahl, so läßt sich die vorstehende Gleichung auch aus §. 239 ableiten. So ist z. B.

$$\log a^3 = \log (a \, . \, a \, . \, a) = \log a + \log a + \log a = 3 \log a.$$

§. 242. Lehrsatz.

Der Logarithmus einer Wurzel wird erhalten, wenn man den Logarithmus des Radicanden durch den Wurzelexponenten dividirt, in Zeichen:

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

Bew. Es sei $$\log a = x,$$
d. h. $$a = k^x;$$
so ist $$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{k^x},$$
oder da nach §. 217 (und 234) eine Potenz radicirt wird, wenn man ihren Exponenten dividirt,

$$\sqrt[m]{a} = k^{\frac{x}{m}}.$$

Demnach ist $$\log \sqrt[m]{a} = \frac{x}{m} = \frac{\log a}{m}.$$

§. 243. Zusatz.

Wir haben bisher stillschweigend angenommen, daß die in Betracht zu ziehenden Logarithmen sich wirklich angeben lassen. Dies ist jedoch verhältnißmäßig nur selten der Fall, da bei weitem die meisten Logarithmen irrational sind. Wie man Näherungswerthe derselben erhält, kann jedoch hier nicht wohl, sondern erst in einem spätern Zweige der Arithmetik, der sogenannten Analysis, gezeigt werden.

Bemerkung.

Uebersieht man nochmals den Gang der bisherigen Entwickelungen im Zusammenhange, so erkennt man sogleich, daß die Addition die Grundlage alles Folgenden bildet. Das wiederholte Addiren führt zum Multipliciren,

das wiederholte Multipliciren zum Potenziren. Durch Umkehrung dieser drei Operationen entstehen die übrigen vier. Man kann daher jene angeführten drei directe, die vier anderen indirecte Operationen nennen. Hierbei muß es sogleich auffallen, daß Addition und Multiplication nur eine einfache Umkehrung, Subtraction und Division, zulassen, dagegen aus dem Potenziren durch Umkehrung zwei verschiedene Operationen, Radiciren und Logarithmiren, entspringen. Der Grund dieser Erscheinung ist aber offenbar der, daß in der Summe sich die beiden Summanden, im Producte Multiplicator und Multiplicandus vertauschen lassen, während die Potenz eine solche Verwechselung des Dignanden und Exponenten nicht gestattet. — Um dieses deutlich zu übersehen, werde zunächst die Gleichung

$$a + b = c$$

aufgestellt. Sind hier a und b als gegeben gedacht, so beantwortet sich die Frage nach c durch die Addition. Man kann aber auch einen Summanden a und die Summe c als gegeben ansehen und den andern Summanden b suchen; diese Frage führt zur Subtraction und zu der Gleichung $c - a = b$. Endlich kann, wenn c und b gegeben sind, $a = c - b$ gesucht werden; diese Frage ist aber von der zweiten nicht wesentlich verschieden und führt daher auch zu keiner neuen Operation, weil die Summanden a und b sich ohne Aenderung der Summe c vertauschen lassen. Eben so kann in der Gleichung

$$a \,.\, b = c$$

a und b gegeben sein und c gesucht werden, welches die Multiplication finden lehrt; oder es wird das Product c und ein Factor a oder b als gegeben angenommen und der andere Factor b oder a gesucht. Weil aber der Multiplicator a und der Multiplicandus b sich verwechseln lassen, ohne das Product c zu ändern, so ist in der Form der Antworten auf diese beiden Fragen keine Verschiedenheit, und es ergibt sich folglich aus denselben nur eine Operation, die Division, indem man entweder $b = \frac{c}{a}$ oder $a = \frac{c}{b}$ setzt. — Ganz anders verhält es sich mit der Gleichung

$$b^m = c.$$

Hier findet auf jede der drei möglichen Fragen eine in ihrer Form von den beiden andern wesentlich verschiedene Antwort statt, und man erhält daher aus derselben drei Operationen, nämlich das Potenziren, wenn c aus b und m gesucht wird, das Radiciren, wenn m und c gegeben sind, und $b = \sqrt[m]{c}$ gefunden werden soll, endlich das Logarithmiren, wenn aus b und c zu suchen ist $m = \log c$ für b. An das Vorhergehende knüpft sich noch die Frage, ob denn die Zahl der Grundoperationen mit den sieben betrachteten abzuschließen sei? Darauf kann erwiedert werden, daß in den bis jetzt angebauten Zweigen der Arithmetik, (die sogenannte höhere Analysis nicht ausgeschlossen), keine andere Operation eine Aufnahme gefunden hat, und daß die Entwickelungen der hinzuzufügenden Operation, welche doch nach dem bisher befolgten Gange keine andere als wiederholtes Potenziren sein könnte, eben wegen des Umstandes, daß Dignand und Exponent sich nicht vertauschen lassen, nicht mit der Bequemlichkeit und Einfachheit, welche den hier behandelten sieben Grundoperationen eigen ist, auszuführen sein würden und daher doch jedenfalls von den Anfangsgründen ausgeschlossen bleiben müßten.

Erster Anhang.

Das Brigg'sche Logarithmensystem.

I.

Wenn man für irgend eine Basis die Logarithmen aller anderen Zahlen von 1 an bis zu irgend einer Grenze berechnet, so erhält man ein Logarithmensystem. Da man für die Basis jede beliebige positive Zahl mit Ausnahme von 1 annehmen kann, so müssen auch unzählige verschiedene Logarithmensysteme möglich sein. Das gebräuchlichste von allen ist das von dem Engländer Briggs (1624) berechnete, welches die Zahl 10 zur Grundzahl hat. Die gewöhnlichen Logarithmentafeln enthalten die Brigg'schen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000; diese Tafeln gewähren beim praktischen Rechnen eine große Erleichterung, indem bei dem Rechnen mit Logarithmen sich das weitläufigere Multipliciren in das kürzere Addiren, das Dividiren in Subtrahiren, das Potenziren in Multipliciren und das Radiciren in Dividiren verwandelt.

II.

Da das Brigg'sche Logarithmensystem zur Basis die Zahl 10 hat, so ist $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$ u. s. w.; ferner ist $\log 1 = 0$. Die Logarithmen aller zwischen 1 und 10, 10 und 100, 100 und 1000 u. s. w. liegenden Zahlen sind irrational; es kann daher die Tafel dieselben nicht vollständig, sondern nur Näherungswerthe in der Form von Decimalbrüchen enthalten. Die größeren, z. B. die Vega'schen Tafeln geben diese Näherungswerthe in 7, die kleineren Tafeln gewöhnlich in 5 Decimalstellen, (was für den Schulgebrauch vollkommen ausreicht*).

An jedem irrationalen Logarithmus, z. B.

$$\log 4325 = 3{,}63599$$

unterscheidet man zwei Theile, die ganze Zahl 3, welche vor dem Komma steht und Charakteristik genannt wird, und den ächten Decimalbruch $0{,}63599 = \frac{63599}{100000}$, welcher Mantisse heißt. — Da

$$\begin{aligned} \log 1 &= 0 \\ \log 10 &= 1 \\ \log 100 &= 2 \\ \log 1000 &= 3 \\ \log 10000 &= 4 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

ist, so müssen die Logarithmen aller 1zifferigen Zahlen zwischen 0 und 1 liegen und also zur Charakteristik 0 haben, ferner die Logarithmen aller 2zifferigen zwischen 1 und 2 liegen und daher zur Charakteristik 1 haben, die Logarithmen der 3zifferigen Zahlen zwischen 2 und 3 liegen und folglich zur Charakteristik 2 haben u. s. w. Es folgt hieraus die Regel: Die Charakteristik hat allemal eine Einheit weniger, als der Numerus (d. h. die gegebene Zahl) Ziffern hat. Diese Regel gilt jedoch nur dann, wenn der Numerus eine ganze Zahl ist.

---

*) Zu empfehlen ist: Jerome de la Lande's logarithmisch-trigonometrische Tafeln, herausgegeben von Dr. Köhler. Stereotypen-Ausgabe bei Tauchnitz. Nach der Vorrede zu dieser Tafel hat de la Lande eine Menge astronomischer Rechnungen mit bloß fünfstelligen Tafeln ausgeführt.

III.

Es sei ferner der Logarithmus eines unächten Decimalbruches, z. B. log 432,5 zu suchen. Nach §. 240 findet man den Logarithmus eines Bruches, wenn man den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers subtrahirt. Nun ist

$$432{,}5 = \frac{4325}{10},$$

folglich $\log 432{,}5 = \log 4325 - \log 10 = 3{,}63599 - 1 = 2{,}63599.$

Auf gleiche Weise, wie wir aus

$$\log 4325 = 3{,}63599$$

erhalten haben $\log 432{,}5 = 2{,}63599,$

findet man $\log 43{,}25 = 1{,}63599$

und $\log 4{,}325 = 0{,}63599.$

Aus diesen Beispielen entnehmen wir folgende Regeln:

1) Numeri, welche mit denselben Ziffern geschrieben werden, haben die nämliche Mantisse.

2) Die Charakteristik hängt lediglich vom Komma ab und hat allemal eine Einheit weniger, als der Numerus Ziffern vor dem Komma hat.

Diese Regeln setzen uns auch in den Stand, zu einem gegebenen (positiven) Logarithmus den Numerus zu finden. Es sei z. B. gegeben der Logarithmus

$$1{,}53729.$$

Wir haben hier zweierlei zu thun: erstens die Ziffern des Numerus zu bestimmen und dann das Komma anzubringen. Nach dem Vorhergehenden hängen die Ziffern des Numerus lediglich von der Mantisse 53729 ab und haben mit der Charakteristik nichts zu schaffen. Wir suchen also in der Tafel die Mantisse 53729 auf und zwar, wenn wir 4 Ziffern erhalten wollen, mit vorgesetzter Charakteristik 3, weil die Numeri der Tafel kein Komma haben. Wir schlagen also auf 3,53729. Da dieser Logarithmus nicht genau in der Tafel steht, so nehmen wir dafür denjenigen, welcher ihm am nächsten kommt, nämlich 3,53732 und erhalten so für den Numerus die Ziffern 3446. Weil aber unser gegebener Logarithmus die Charakteristik 1 hat, so schneiden wir die ersten beiden Ziffern durch ein Komma ab. Demnach erhalten wir als den gesuchten Numerus

$$34{,}46.$$

Wir wollen nun die vorhergehenden Regeln auf einige Beispiele anwenden. Es sei z. B. gegeben

1) $\dfrac{56 \,.\, 79{,}34}{803{,}4}$ und 2) $\sqrt[5]{(9{,}76)^8}$

so ist die Rechnung folgende:

1)
$$\begin{array}{rl} \log 56 & = 1{,}74819 \\ + \log 79{,}34 & = 1{,}89949 \\ \hline & 3{,}64768 \\ - \log 803{,}4 & = 2{,}90493 \\ \hline & 0{,}74275 \\ \text{Num.} & = 5{,}530. \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rl} \log 9{,}76 & = 0{,}98945 \\ & \phantom{=0{,}9894}8 \\ \hline & 7{,}91560 \\ 5) & 1{,}58312 \\ \text{Num.} & = 38{,}29. \end{array}$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $8{,}729 \times 53{,}4 = 466{,}1$ 2) $35{,}78 \times 2{,}085 = 74{,}60$

3) $2{,}45 \times 18{,}3 \times 3{,}47 = 155{,}6$

4) $\dfrac{8729}{73} = 119{,}6$ 5) $\dfrac{79{,}2}{3{,}845} = 20{,}60$

6) $\dfrac{34{,}2 \times 98{,}5}{137{,}6} = 24{,}48$ 7) $\dfrac{7905}{8{,}3 \times 45{,}6} = 20{,}89$

8) $2{,}45^3 = 14{,}71$ 9) $2{,}03^{13} = 9943$

10) $\sqrt[3]{728} = 8{,}996$ 11) $\sqrt[6]{396{,}1} = 2{,}710$.

12) $\sqrt[10]{398{,}4} = 1{,}820$ 13) $\sqrt[4]{\frac{728 \, . \, 5930}{2{,}48}} = 3632$

In dem 9. Exempel erhielten wir (bei Anwendung der 5stelligen Logarithmentafel)

$$2{,}03^{13} = 9943.$$

In diesem Resultate sind jedoch nur die ersten Ziffern richtig; die vierte Ziffer dagegen ist fehlerhaft; es muß nämlich heißen

$$2{,}03^{13} = 9941,$$

wie man sich überzeugt, wenn man entweder 2,03 13mal mit sich selbst multiplicirt, oder wenn man 7stellige Tafeln anwendet. Allein auch dieses letztere Resultat ist nicht ganz genau; es gibt uns von der gesuchten Zahl nur die ersten vier Ziffern, die Ganzen; die derselben außerdem noch angehörenden (26) Decimalstellen fehlen sämmtlich. — Wie viel Stellen auch immer eine Tafel enthalten mag, sie gibt für die Logarithmen doch nur Näherungswerthe; sämmtliche Logarithmen, welche man aus der Tafel entnimmt, sind mit einem Fehler behaftet; es kann daher bei Anwendung der Logarithmentafeln ein ganz richtiges Resultat nur hervorgehen, wenn (zufällig) die begangenen Fehler sich ausgleichen. — Wenn man einen Logarithmus multiplicirt, wie dies z. B. der Fall ist, wenn in dem Exempel Potenzen vorkommen, so vergrößert man den Fehler so vielmal, als die Zahl, mit welcher man multiplicirt, Einheiten enthält, und es kann dann leicht geschehen, daß in dem Numerus, welchen man am Ende der Rechnung erhält, die vierte Ziffer um eine oder mehrere Einheiten von der Wahrheit abweicht, wie dies z. B. bei dem oben angeführten Exempel der Fall war.

IV.

Im Vorhergehenden haben wir nur solche Numeri in Betracht gezogen, welche > 1 sind. Da $\log 1 = 0$ ist, so folgt hieraus, daß die Logarithmen aller Zahlen, welche größer als 1 sind, positiv, die Logarithmen aller ächten Brüche negativ sind. So ist z. B.

$$\log \frac{1}{10} = -1, \text{ weil } 10^{-1} = \frac{1}{10} \text{ ist,}$$

$$\log \frac{1}{100} = -2, \;\text{„}\; 10^{-2} = \frac{1}{100} \;\text{„}$$

$$\log \frac{1}{1000} = -3, \;\text{„}\; 10^{-3} = \frac{1}{1000} \;\text{„ u. s. w.}$$

Es ergibt sich hieraus auch noch, daß **negative Zahlen gar keine (reellen) Logarithmen haben können.** Der Logarithmus einer negativen Zahl kann nämlich weder positiv sein, weil ein solcher einem positiven unächten Bruche angehört, noch negativ sein, weil ein solcher einem positiven ächten Bruche zukommt.

V.

Wir wollen uns nun mit der Aufgabe beschäftigen, den Logarithmus eines ächten Decimalbruchs, z. B. des Decimalbruchs

$$0{,}573 = \frac{573}{1000}$$

zu finden. Nach §. 240 ist

$$\log 0{,}573 = \log \frac{573}{1000} = \log 573 - \log 1000 = 2{,}75815 - 3.$$

Da in dieser Differenz der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, so ist der gesuchte Logarithmus negativ; man pflegt jedoch die Subtraction nicht wirklich auszuführen,

sondern alle negativen Logarithmen als Differenzen zu schreiben, doch so, daß der Minuend an der Spitze eine Null hat; man setzt also statt

$$2{,}75815 - 3 \text{ die gleichgeltende Differenz } 0{,}75815 - 1;$$

hiernach ist also $\log 0{,}573 = 0{,}75815 - 1.$

Auf gleiche Weise findet man

$$\log 0{,}0573 = 0{,}75815 - 2$$
$$\log 0{,}00573 = 0{,}75815 - 3.$$

Aus diesen Beispielen ziehen wir die Regel: Der Logarithmus eines ächten Decimalbruches hat eine negative Charakteristik, und diese negative Charakteristik hat eben so viele Einheiten, als der Bruch Nullen an der Spitze hat.

Soll umgekehrt zu einem negativen Logarithmus, z. B. zu

$$0{,}35207 - 2$$

der Numerus gefunden werden, so sucht man zuerst mit Hülfe der Mantisse 35207, (indem man in der Tafel unter der Charakteristik 3 aufschlägt), die Ziffern des Numerus und schreibt demselben wegen der Charakteristik — 2 zwei Nullen vor; man erhält so den Numerus = 0,02243.

Auch die Logarithmen gemeiner, ächter Brüche schreibt man immer in ganz ähnlicher Art, wie die Logarithmen ächter Decimalbrüche, als Differenzen. Es sei z. B. der Bruch $\frac{5}{83}$ gegeben, so ist

$$\log \frac{5}{83} = \log 5 - \log 83.$$

Nun ist $\log 5 = 0{,}69897$

und $\log 83 = 1{,}91908.$

Da der Subtrahend größer ist, als der Minuend, so vermehrt man die Charakteristik des Minuenden um so viel Einheiten, hier um 2 Einheiten, bis man wirklich subtrahiren kann und zieht diese hinzugefügten Einheiten wieder ab, also

$$\log 5 = 2{,}69897 - 2$$
$$\log 83 = \underline{1{,}91908}$$
$$\log \frac{5}{83} = 0{,}77989 - 2.$$

Sucht man hierzu den Numerus, so erhält man 0,06024; es ist also

$$\frac{5}{83} = 0{,}06024.$$

Die Rechnung mit diesen negativen Logarithmen erfordert zwar etwas mehr Aufmerksamkeit als mit positiven Logarithmen, bietet aber übrigens keine Schwierigkeiten dar. Nur den einen Fall, wenn aus einem ächten Bruche die Wurzel gezogen werden soll, wollen wir noch durch ein Beispiel erläutern. Es sei also zu berechnen

$$\sqrt[3]{0{,}0008421}.$$

Es ist $\log 0{,}0008421 = 0{,}92536 - 4.$

Da der Wurzelexponent 3 in der negativen Charakteristik — 4 nicht aufgeht, die Charakteristik aber jederzeit eine ganze Zahl sein muß, — entgegengesetzten Falls würden wir zu dem Logarithmus keinen Numerus aufschlagen können, — so setzen wir statt 0 — 4 die Differenz, 2 — 6; dann ist die Rechnung folgende:

$$\log 0{,}0008421 = 2{,}92536 - 6$$
$$3)\overline{0{,}97512 - 2}$$

Numerus = 0,09443.

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $0{,}795 \times 0{,}00386 = 0{,}003069$

2) $572 \times 0{,}0893 = 51{,}08$

3) $3{,}587 \times 0{,}00416 = 0{,}01492$

4) $\frac{659}{8364} = 0{,}07879$ 5) $\frac{0{,}3826}{42{,}7} = 0{,}008960$

6) $\frac{78{,}5}{0{,}0398} = 1972$ 7) $\frac{0{,}5638}{0{,}00492} = 114{,}6$

8) $\frac{0{,}000321}{0{,}0728} = 0{,}004409$ 9) $(0{,}349)^5 = 0{,}005178$

10) $\left(\frac{3}{4}\right)^8 = 0{,}1001$ 11) $\sqrt[3]{0{,}572} = 0{,}8301$

12) $\sqrt[2]{0{,}07} = 0{,}2646$ 13) $\sqrt[5]{0{,}0803} = 0{,}6039$

14) $\sqrt[4]{\frac{5}{7}} = 0{,}9193.$ 15) $\sqrt[8]{\frac{1}{6}} = 0{,}7993.$

VI.

Die in den §§. 239 — 242 aufgeführten Formeln lehren uns, wie man bei Benutzung von Logarithmen zu verfahren hat, wenn eine Zahl mit einer andern multiplicirt, dividirt, potenzirt oder radicirt werden soll. Dagegen können die Logarithmen offenbar keine Anwendung finden, wenn zwei Zahlen zu addiren oder zu subtrahiren sind. Vielmehr ist man, wenn in einem Ausdrucke, dessen Zahlenwerth mit Hilfe der Logarithmen gesucht wird, ein Plus- oder Minuszeichen vorkommt, allemal genöthigt, zu den Logarithmen der durch das Plus- oder Minuszeichen verbundenen Glieder die Numerie aufzuschlagen, dann diese zu addiren oder zu subtrahiren und bei weiterer Fortsetzung der Rechnung von der erhaltenen Summe oder Differenz wieder den Logarithmus aufzusuchen. — Demgemäß gestaltet sich z. B. für den folgenden Ausdruck die Rechnung also:

$$(\sqrt[2]{50} - \sqrt[3]{44})^5$$

$\log 50 = 1{,}69897$
$2)\overline{0{,}84948}$
Numerus $= 7{,}071$
$+ 7{,}071$
$- 3{,}530$
$3{,}541$

$\log 44 = 1{,}64345$
$3)\overline{0{,}54782}$
Numerus $= 3{,}530$
$\log 3{,}541 = 0{,}54913$
$\overline{2{,}74565}(5$
Numerus $= 556{,}7$

Hiernach ist folglich $(\sqrt[2]{50} - \sqrt[3]{44})^5 = 556{,}7.$

Zur weiteren Uebung folgende Beispiele:

1) $\sqrt[5]{(2{,}07 + \sqrt[3]{79{,}2})} = 1{,}448$

2) $\sqrt{(6{,}893 - 3{,}4 \,.\, \sqrt[3]{0{,}956})} = 1{,}883$

3) $(2{,}56 - \sqrt{4{,}08})^7 = 0{,}01339$

4) $\sqrt[6]{\left(\frac{21{,}3 + 7{,}3 \,.\, \sqrt[3]{2}}{893{,}2}\right)} = 0{,}5696.$

VII.

Im Vorhergehenden sind nur solche Numeri in Betracht gezogen worden, welche nicht mehr als 4 Ziffern haben. Um den Logarithmus einer Zahl, welche mit mehr als 4 Ziffern geschrieben wird, z. B. der Zahl

479635

mit Hilfe unserer Tafel näherungsweise zu bestimmen, lassen wir die auf die 4te noch

folgenden Ziffern unberücksichtigt, setzen also 479635 = 479600, suchen dann in der Tafel die Mantisse zu 4796 und schreiben derselben, da der gegebene Numerus 6 Ziffern hat, die Charakteristik 5 vor. Auf diese Art erhalten wir

$$\log 479600 = 5{,}68088.$$

(Es ist nämlich 479600 = 4796 . 100, daher log 479600 = log 4796 + log 100 = 3,68088 + 2 = 5,68088.)

Soll umgekehrt zu einem Logarithmus, welcher eine größere Charakteristik als 3 hat, z. B. zu dem Logarithmus 6,83703 der Numerus gefunden werden, so finden wir in der Tafel zu der Mantisse 83703 die Ziffern 6871; weil aber vermöge der Charakteristik 6 der Numerus 7 Ziffern haben muß, so hängen wir noch 3 Nullen an; demnach ist der gesuchte Numerus

6871000.

Sollen von den in Rechnung zu stellenden Zahlen mehr als 4 Ziffern, 5, 6 oder 7 Ziffern in Betracht gezogen werden, so muß man größere Tafeln anwenden. Will man noch genauer oder ganz genau rechnen, so muß man überhaupt auf den Gebrauch der Logarithmentafeln verzichten. Uebrigens sind die Fälle nur selten, in denen von einer Zahl mehr als die ersten 4 Ziffern wirklich bekannt sind oder zu wissen verlangt werden. Nur sehr selten wird ein Capitalist die Größe seines Vermögens, eine Regierung die Volkszahl oder den Flächeninhalt ihres Landes u. dgl. noch genauer als in den 4 ersten Ziffern anzugeben im Stande sein.

VIII.

Man kann jedoch auch mit Hilfe der fünfstelligen Logarithmen, wenn man sich einer leichten Interpolationsmethode bedienen will, bei der Bestimmung des Logarithmus die fünf ersten Ziffern des Numerus in Anwendung bringen und eben so umgekehrt, wenn der Logarithmus gegeben ist, den Numerus bis auf die Einheit der fünften Ziffer (nahe zu) richtig erhalten.

Wenn man nämlich die Logarithmen auf einander folgender, also solcher Zahlen, welche beständig um 1 zunehmen, mit einander vergleicht, so findet man, daß auch die zugehörigen Logarithmen um nahezu gleiche Differenzen wachsen, und man wird daher annähernd annehmen können, daß für Numeri, welche nur wenig von einander verschieden sind, sich die Zuwachse der Logarithmen wie die Zuwachse der Numeri verhalten. Dies vorausgesetzt, wenden wir bei der Bestimmung des Logarithmus einer fünfzifferigen Zahl z. B. 25374 folgende Ueberlegung an. Da

$$\log 25370 = 4{,}40432$$

und

$$\log 25380 = 4{,}40449$$

ist, so wächst der Logarithmus um 17 (Hunderttausendtel), wenn der Numerus um 10 zunimmt: folglich muß, wenn der Numerus nur um 1 zunimmt, der Logarithmus um $\frac{17}{10}$, und wenn der Numerus um 4 zunimmt, der Logarithmus um $\frac{4 \cdot 17}{10} = 6{,}6 = 7$ (ohngefähr) wachsen. Hiernach erhalten wir

$$\log 25374 = 4{,}40432 \\ + 7 \\ = 4{,}40439.$$

Soll umgekehrt zu dem Logarithmus

4,40439

der Numerus bis zur fünften Ziffer bestimmt werden, so subtrahiren wir von demselben den nächst kleineren Logarithmus, dessen Numerus = 25370 ist, also

$$\begin{array}{r} 4{,}40439 \\ 4{,}40432 \\ \hline 7. \end{array}$$

Wir erhalten so als Differenz 7; hätte die Differenz 17 betragen, so wäre der Numerus um 10 größer ausgefallen; da aber die Differenz nur 7 beträgt, so vergrößern wir den Numerus nur um $\frac{7 \cdot 10}{17} = 4$ (ohngefähr). Hiernach ist also der gesuchte Numerus

$$= 25370 + 4 = 25374.$$

Wir werden jedoch von dieser genaueren Rechnung bis auf 5 Ziffern nur in seltenen Fällen Gebrauch machen, um nicht an dem Nutzen, welchen uns vorzugsweise die Logarithmentafel gewähren soll, nämlich Zeitersparniß, einzubüßen.

Zweiter Anhang.

Von den Exponentialgleichungen.

Eine Gleichung, bei welcher die Unbekannte x in dem Exponenten einer Potenz vorkommt, heißt eine Exponentialgleichung. Auf welche Weise und in welchen Fällen man zur Auflösung derselben gelangen kann, wird sich am klarsten aus den folgenden Beispielen ergeben.

Es sei zunächst die Gleichung

$$1) \quad ab^x = c,$$

bei welcher nur in einem Gliede eine Potenz mit unbekanntem Exponenten vorkommt, gegeben. Nehmen wir auf beiden Seiten die Logarithmen, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in die algebraische Gleichung

$$\log a + x \log b = \log c,$$

aus welcher

$$x = \frac{\log c - \log a}{\log b}$$

hervorgeht. Lautete also die gegebene Gleichung in bestimmten Zahlen

$$7 \cdot 2^x = 3728,$$

so erhalten wir nach dem angegebenen Verfahren zunächst

$$\log 7 + x \log 2 = \log 3728$$

und hieraus $x = \frac{\log 3728 - \log 7}{\log 2} = \frac{3{,}57148 - 0{,}84510}{0{,}30103} = \frac{2{,}72638}{0{,}30103}$

$$= 9{,}056 \ldots$$

Ist ferner die Gleichung

$$2) \quad ab^{x-2} = cd^{3x+1}$$

gegeben, welche nur aus zwei Gliedern besteht, deren jedes eine Potenz mit unbekanntem Exponenten enthält, so leiten wir aus derselben zunächst, indem wir auf beiden Seiten die Logarithmen nehmen, die algebraische Gleichung

$$\log a + (x - 2) \log b = \log c + (3x + 1) \log d$$

ab, aus welcher sich ergibt

$$x = \frac{\log c + \log d + 2 \log b - \log a}{\log b - 3 \log d}.$$

Ist eine Gleichung wie folgende

$$3) \quad \frac{a}{b^x + c} = \frac{d}{f - g\,b^x}$$

gegeben, in welcher eine Potenz mit unbekanntem Exponenten in verschiedentlicher algebraischer Verbindung mit bekannten Ausdrücken vor-

kommt, so setzen wir um größerer Einfachheit willen $b^x = z$, wodurch sich die gegebene Gleichung verwandelt in

$$\frac{a}{z + c} = \frac{d}{f - gz}.$$

Indem wir diese Gleichung auf bekannte Weise auflösen, erhalten wir

$$z \text{ oder } b^x = \frac{af - cd}{ag + d}$$

und hieraus
$$x = \frac{\log(af - cd) - \log(ag + d)}{\log b}$$

Auch die Gleichung

$$4)\quad ab^{x+2} + cb^{x-1} = d$$

läßt sich leicht auf den vorhergehenden Fall zurückführen, indem wir dieselbe in folgender Art schreiben:

$$ab^2b^x + \frac{cb^x}{b} = d.$$

Diese Gleichung aber enthält nur den einzigen unbekannten Ausdruck b^x.

Endlich führen wir noch kurz an, daß auch eine Gleichung, bei welcher die Unbekannte x in einem Wurzelexponenten vorkommt, zu den Exponentialgleichungen gehört, da sich jede Wurzel in eine gebrochene Potenz verwandeln läßt. Wäre z. B. die Gleichung

$$5)\quad a\sqrt[x]{b} + c\sqrt[2x]{b} = d$$

gegeben, so verwandeln wir dieselben zunächst in die folgende:

$$ab^{\frac{1}{x}} + cb^{\frac{1}{2x}} = d.$$

Setzen wir hier $b^{\frac{1}{2x}} = z$, so formt sich die vorstehende Gleichung um in

$$az^2 + cz = d.$$

Durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergibt sich

$$z \text{ oder } b^x = \frac{-c \pm \sqrt{4ad + c^2}}{2a},$$

womit diese Aufgabe auf Nr. 1 zurückgeführt ist.

Wir fügen keine Uebungsbeispiele bei, weil die Sache im allgemeinen von geringerer Wichtigkeit ist; die besonderen Anwendungen, welche dieselbe in der Zinseszins- und Rentenrechnung findet, werden dort erledigt werden.

Dritter Anhang.

Die Zinseszinsrechnung.

I.

Ein Capital steht auf Zinseszinsen, wenn die am Ende jedes Termines, z. B. jedes Jahres fälligen Zinsen zum Capital geschlagen und mitverzinset werden.

Wer 100 Thlr. zu 5 Procent ein Jahr ausleiht, erhält am Ende des Jahres an Capital und Zinsen 105 Thlr. zurück. Wird unter gleichen Bedingungen 1 Thlr. ausgeliehen, so erhält man am Ende des Jahres $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$ Thlr. an Capital und Zinsen. Die Zahl 1,05, welche anzeigt, was aus dem Capital 1 im Laufe eines Jahres wird, heißt der Zinsfuß und wird mit p bezeichnet. Für 5 Procent ist, wie wir gesehen haben, $p = 1{,}05$; für 4 Procent dagegen ist, wie leicht zu zeigen, $p = 1{,}04$; für $3^1/_2$ Procent ist $p = 1{,}035$ u. s. w.

II.

Wenn man für 1 Thlr. am Ende des Jahres bei 5 Procent 1,05 Thlr. oder überhaupt p Thlr. zurückerhält, so ist klar, daß man für a Thlr. am Ende des Jahres $a \,.\, 1{,}05 = ap$ Thlr. erhält. Nennen wir daher dasjenige, was aus a Thlrn. im Laufe eines Jahres wird, b, so ist

$$1)\quad b = ap.$$

Wird jetzt für das zweite Jahr die Summe b ausgeliehen und dasjenige, was aus derselben bis zu Ende des zweiten Jahres wird, mit c bezeichnet, so ist offenbar $c = bp$, oder wenn wir aus (1) den Werth von b einsetzen,

$$2)\quad c = ap^2.$$

Leihen wir nun für das dritte Jahr die Summe c aus und bezeichnen mit d dasjenige, was aus derselben bis zu Ende des Jahres wird, so ist $d = cp$, oder wenn wir den Werth von c aus (2) einsetzen,

$$3)\quad d = ab^3.$$

Auf diesem Wege fortfahrend, findet man leicht, wenn überhaupt A dasjenige bedeutet, was aus dem Capital a im Laufe von n Jahren geworden ist,

$$A = a \,.\, p^n.$$

III.

Die so eben erhaltene Fundamentalgleichung zeigt zunächst, wie man A findet, wenn a, p und n gegeben sind. Es kann aber überhaupt jeder der vier Buchstaben a, p, n und A berechnet werden, wenn die drei übrigen gegeben sind, wie dies folgende Gleichungen zeigen:

$$1)\quad A = ap^n,\ \log A = \log a + n \log p$$

$$2)\quad a = \frac{A}{p^n},\ \log a = \log A - n \log p$$

$$3)\quad p = \sqrt[n]{\frac{A}{a}},\ \log p = \frac{\log A - \log a}{n}$$

$$4)\quad n = \frac{\log A - \log a}{\log p}$$

In diesen Gleichungen ist die Beantwortung aller Fragen über Zinseszinsrechnung enthalten. Während die Gleichung (1) den Werth A, welchen ein Capital, das gegenwärtig die Größe a hat, in n Jahren erlangt, finden lehrt, werden wir umgekehrt durch die Gleichung (2) in den Stand gesetzt, die Größe des Kapitals a zu berechnen, welches wir gegenwärtig ausleihen müssen, um nach n Jahren die Summe A zu erhalten. Eine Summe A, welche erst nach n Jahren ausgezahlt wird, hat nicht gleichen Werth mit einer gegenwärtig zu zahlenden Summe A; vielmehr ist vermöge Gleichung (2) der gegenwärtige Werth eines erst nach n Jahren zu zahlenden Kapitals A nur gleich

$$\frac{A}{p^n}.$$

Die Gleichung (3) lehrt den Zinsfuß p finden, wenn a, A und n gegeben sind, und die Gleichung (4) beantwortet die Frage, nach wie vielen Jahren ein heute zum Zinsfuß p auf Zinseszinsen ausgeliehenes Capital eine bestimmte Größe A erreicht.

Im Vorhergehenden ist nur von jährlichen Zinsen die Rede gewesen; sollen die Zinsen halbjährlich berechnet werden, so sind die jährlichen Zinsen keineswegs das Doppelte der halbjährlichen, indem bei zusammengesetzten Zinsen die Zinsen des ersten Halbjahres im zweiten schon mit verzinset werden. Bedeutet b den Zinsfuß für jährliche Zinsen, π den Zinsfuß für halbjährliche Zinsen, so läßt sich der Werth, welchen das Capital a am Ende des ersten Jahres erlangt, sowohl durch ap, als auch, da das ganze

Jahr aus zwei halben besteht, durch $a\pi^2$ ausdrücken; demnach muß, wenn das Capital a in beiden Fällen am Ende des Jahres den nämlichen Werth haben soll

$$ap = a\pi^2$$

sein, woraus sich

$$\pi = \sqrt[2]{p}$$

ergibt. — Eben so findet man leicht, wenn π den Zinsfuß für monatliche, p für jährliche Zinsen bezeichnet,

$$\pi = \sqrt[12]{p}$$

u. dgl. m. Da man sich das ausgeliehene Capital nicht bloß terminweise, sondern auch ganz allmählig im ersten Jahre von der Größe a bis zur Größe ap, im zweiten von ap bis ap^2 u. s. w. wachsend denken kann, so braucht in der Gleichung (4) n nicht ausschließlich eine ganze Zahl zu bedeuten, sondern es kann n auch jeden beliebigen Bruch vorstellen.

Wir wollen nun zunächst für jede der vier obigen Formeln ein vollständig ausgerechnetes Beispiel hersetzen.

1) Es sei gegeben a = 500, p = 1,035 (3½ Procent), n = 8; so ist A = 658,4.

$$\begin{aligned} \log p &= 0{,}01494 \;(8 \\ n \log p &= 0{,}11952 \\ + \log a &= 2{,}69897 \\ &\; 2{,}81849 \\ \text{Numerus} &= 658{,}4. \end{aligned}$$

2) Es sei gegeben A = 3456, p = 1,04 (4 Procent), n = 20; so ist a = 1577.

$$\begin{aligned} \log p &= 0{,}01703 \;(20 \\ -\, n \log p &= 0{,}34060 \\ + \log A &= 3{,}53857 \\ &\; 3{,}19797 \\ \text{Numerus} &= 1577. \end{aligned}$$

3) Es sei gegeben a = 839, A = 1225, n = 9; so ist p = 1,043 ohngefähr (also 4,3 Procent).

$$\begin{aligned} \log A &= 3{,}08814 \\ -\log a &= 2{,}92376 \\ n &= 9)0{,}16438 \\ &\; 0{,}01826 \\ \text{Numerus} &= 1{,}043. \end{aligned}$$

4) Es sei gegeben a = 2540, A = 9655, p = 1,05, so ist n = 27,3.

$$\begin{aligned} \log A &= 3{,}98475 \\ -\log a &= 3{,}40483 \\ \log p = 0{,}02119 &\,|\, 0{,}57992 \,|\, 27{,}3 \\ &\; 4238 \\ &\; 15612 \\ &\; 14833 \\ &\;\;\; 7790 \\ &\;\;\; 6357 \\ &\;\;\; 1433 \end{aligned}$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) Was wird aus einem Capitale von 800 Thlrn., welches auf Zinseszinsen zu 5 Prozent 12 Jahre ausgeliehen ist? — Antw. 1437 Thlr.

2) Was wird aus 5555 Thlrn. zu 4 Procent nach 30 Jahren? — Antw. 18010 Thlr. (ohngefähr).

*2) Wie hoch wird sich das Vermögen eines Mannes, welcher ein Geschäft mit 1 Thlr. beginnt, nach 25 Jahren belaufen, wenn derselbe jedes Jahr 50 Procent gewinnt? — Antw. 25250 Thlr.

3) In einer Stadt von 7953 Einwohnern vermehrt sich die Bevölkerung jedes Jahr um 2 Procent; wie viel Einwohner wird diese Stadt nach 50 Jahren haben? — Antw. 21410 Einw. (ohngefähr).

4) Wie groß ist ein Capital, welches, zu $3^1/_3$ Procent ausgeliehen, in 5 Jahren zu der Summe von 10000 Thlrn. anwächst? — Antw. 8502 Thlr.

5) Ein Wucherer leihet jemand 800 Thlr. und läßt sich dafür einen Schuldschein, auf 1200 Thlr. lautend, welche nach fünf Jahren ohne Zinsen zahlbar sind, ausstellen. Wie viel Procent nahm der Wucherer, wenn Zinseszinsen berechnet werden? — Antw. Beinahe $8^1/_2$ Procent.

6) Wie groß sind die halbjährlichen Zinsen, wenn die jährlichen Zinsen zu 8 Procent gerechnet werden? — Antw. 3,9 Procent (ohngefähr).

7) Wie lange muß ein Capital zu 5 Procent auf Zinseszinsen stehen, wenn es sich verdoppeln soll? — Antw. 14,2.. Jahr.

8) Wie lange muß ein Capital zu 4 Procent auf Zinseszinsen stehen, wenn es dreimal so groß werden soll? — Antw. 28,0.. Jahr.

Siebenter Abschnitt.

Von den Reihen.

A. Von der arithmetischen und der geometrischen Reihe.

§. 244. Erklärung.

Eine Reihe von Ausdrücken, in welcher je zwei auf einander folgende Ausdrücke von einander subtrahirt, beständig dieselbe Differenz geben, also das nämliche arithmetische Verhältniß zu einander haben, wird eine arithmetische Reihe oder eine arithmetische Progression genannt. Die einzelnen Ausdrücke heißen die Glieder der Reihe. — Ist das erste Glied der Reihe = a, die beständige Differenz = d und das letzte Glied = t, so ist das Schema der Reihe folgendes

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots\ldots\ t - 2d,\ t - d,\ t.$$

Arithmetische Reihen sind z. B. die Reihe der natürlichen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ldots,$$

die Reihe der ungeraden Zahlen

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\ldots,$$

die Reihe der geraden Zahlen

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\ldots$$

Andere Beispiele liefern folgende Reihen:

1) 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26....,
2) 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45....,
3) 15, 11, 7, 3, — 1, — 5, — 9, — 13...

In der ersten der zuletzt aufgeführten Reihen ist $a = 5$ und $d = 3$; in der zweiten ist $a = 3$ und $d = 6$; in der dritten ist $a = 15$ und $d = -4$. Da d nicht bloß positiv oder negativ, sondern auch gleich Null sein kann, so gehört auch eine Reihe mit lauter gleichen Gliedern a, a, a, a.... zu den arithmetischen Reihen.

§. 245. Lehrsatz.

Bezeichnen wir die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe mit n und die Summe aller Glieder mit S, so ist

$$1)\quad t = a + (n - 1)d$$

und

$$2)\quad S = \frac{n(a + t)}{2}.$$

Bew. 1) Das erste Glied der Reihe ist $= a$, das zweite $= a + d$, das dritte $= a + 2d$, das vierte $= a + 3d$ u. s. w. Auf diesem Wege fortfahrend sieht man leicht, daß z. B. das 7te Glied $= a + 6d$, das 20te $= a + 19d$ und überhaupt das nte Glied $t = a + (n - 1)d$ ist.

2) Wenn wir die Reihe zweimal hinschreiben und zwar das erstemal in gewöhnlicher, das zweitemal in umgekehrter Ordnung, so entstehen folgende Gleichungen:

$$S = a + a + d + a + 2d \ldots\ldots + t - 2d + t - d + t.$$
$$S = t + t - d + t - 2d \ldots\ldots + a + 2d + a + d + a.$$

Addiren wir diese Gleichungen, so erhalten wir

$$2S = a + t + a + t + a + t \ldots\ldots + a + t + a + t + a + t,$$

oder da in dieser Summe $a + t$ offenbar so vielmal als die Reihe Glieder hat, d. h. nmal als Summand vorkommt,

$$2S = n(a + t),$$

also

$$S = \frac{n(a + t)}{2},$$

d. h. die Summe der Reihe wird gefunden, wenn wir das erste und letzte Glied addiren und diese Summe mit der halben Anzahl der Glieder multipliciren.

Ist z. B. $a = 7$, $d = 3$, $n = 15$, so ist

$$1)\quad t = 7 + 14 . 3 = 7 + 42 = 49$$

und

$$2)\quad S = \frac{15 . (7 + 49)}{2} = \frac{15 . 56}{2} = 420.$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen. Es sei gegeben:

1) $a = 8$, $d = 5$, $n = 12$; so ist $t = 63$, $S = 426$.
2) $a = 1$, $d = 3$, $n = 20$; „ „ $t = 58$, $S = 590$.
3) $a = 5$, $d = 7$, $n = 17$; „ „ $t = 117$, $S = 1037$.
4) $a = 12$, $d = 2\frac{1}{2}$, $n = 13$; „ „ $t = 42$, $S = 351$.
5) $a = 4$, $d = \frac{2}{3}$, $n = 14$; „ „ $t = 12\frac{2}{3}$, $S = 116\frac{2}{3}$.
6) $a = 9$, $d = -2$, $n = 18$; „ „ $t = -25$, $S = -144$.

§. 246. Zusatz.

Da zwei Gleichungen im allgemeinen ausreichen, um zwei Unbekannte zu bestimmen, so wird man durch die beiden Gleichungen des vorhergehenden §.

$$1)\quad t = a + (n - 1)d,$$

$$2)\quad S = \frac{n(a + t)}{2}$$

in den Stand gesetzt, wenn von den Buchstaben a, d, n, t, S irgend drei gegeben sind, die beiden fehlenden zu berechnen.

Zur Uebung können folgende Beispiele dienen; es sei gegeben

1) $a = 5$, $d = 3$, $t = 32$; so ist $n = 10$, $S = 185$.
2) $a = 8$, $n = 20$, $t = 122$; „ „ $d = 6$, $S = 1300$.
3) $a = 7$, $n = 25$, $S = 325$; „ „ $t = 19$, $d = 1/2$.
4) $a = 15$, $t = 99$, $S = 741$; „ „ $n = 13$, $d = 7$.
5) $d = 1/4$, $n = 15$, $t = 7$; „ „ $a = 3\,1/2$, $S = 78\,3/4$.
6) $n = 13$, $t = 19$, $S = 188\,1/2$; „ „ $a = 10$, $d = 3/4$.
7) $d = 5$, $n = 17$, $S = 782$; „ „ $a = 6$, $t = 86$.
8) $a = 7$, $d = 2$, $S = 112$; „ „ $n = 8$, $t = 21$.
9) $d = 1$, $t = 18$, $S = 143$; „ „ $\begin{cases} n = 11, & a = 8. \\ \text{oder } n = 26, & a = -7. \end{cases}$

Endlich mögen hier noch einige Beispiele folgen, welche Anwendungen der Sätze über die arithmetische Reihe enthalten.

1) Ein Bedienter erhält von seinem Herrn im ersten Jahre 20 Thlr. Lohn, in jedem folgenden Jahre aber 2 Thlr. mehr; wie viel erhält der Bediente im 15ten Jahre? — Antw. 48 Thlr. — Und wie viel in allen 15 Jahren zusammen? — Antw. 510 Thlr.

2) Einen artesischen Brunnen von 200 Fuß Tiefe zu bohren, zahlt man für den ersten Fuß 25 Sgr. und für jeden folgenden 2 Pf. mehr; wie theuer kommt der Brunnen? — Antw. 277 Thlr. 6 Sgr. 8 Pf.

3) Ein Fußgänger legt einen Weg von 54 Meilen in 9 Tagen in der Art zurück, daß er jeden folgenden Tag 1/4 Meile mehr macht, als den vorhergehenden. Wie viel Meilen macht derselbe am ersten und am letzten Tage seiner Reise? — Antw. 5 Meilen und 7 Meilen.

4) 1000 Thaler sollen unter 5 Brüder so vertheilt werden, daß jeder ältere 50 Thlr. mehr als jeder jüngere Bruder erhält. Wie viel erhält der jüngste und der älteste von diesen Brüdern? — Antw. 100 Thlr. und 300 Thlr.

5) Zwischen den Zahlen 2 und 5 sollen 8 andere Zahlen so eingeschaltet (interpolirt) werden, daß eine aus 10 Gliedern bestehende arithmetische Reihe entsteht; wie groß ist die Differenz dieser Reihe? — Antw. 1/3.

6) Von einer arithmetischen Reihe ist das erste Glied = 3 und das 15te Glied = 59; wie groß ist die Differenz dieser Reihe? — Antw. 4.

7) Von einer arithmetischen Reihe ist das 6te Glied = 22 und das 18te Glied = 70; wie groß ist das erste Glied a und die Differenz d dieser Reihe? — Antw. $a = 2$ und $d = 4$.

§. 247. Erklärung.

Eine Reihe von Ausdrücken, von denen je zwei auf einander folgende durch einander dividirt den nämlichen Quotienten geben, also dasselbe geometrische Verhältniß zu einander haben, wird eine **geometrische Reihe** oder eine **geometrische Progression** genannt.

Bezeichnen wir das erste Glied einer geometrischen Reihe mit a, das letzte mit t und den beständigen Quotienten, welchen man erhält, wenn ein Glied der Reihe durch das nächstvorhergehende dividirt wird, mit e, so ist das Schema einer geometrischen Reihe folgendes:

$$a,\ ae,\ ae^2 \ldots\ \ldots \frac{t}{e^2},\ \frac{t}{e},\ t.$$

Geometrische Reihen sind z. B. folgende:

1) 3, 6, 12, 24, 48, 96...
2) 4, 12, 36, 108, 324, 972...

3) $8, \quad 4, \quad 2, \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} \ldots$

4) $+9, \quad -6, \quad +4, \quad -\frac{8}{3}, \quad +\frac{16}{9}, \quad -\frac{32}{27} \ldots$

In der ersten dieser Reihen ist $a = 3$ und $e = 2$, in der zweiten ist $a = 4$ und $e = 3$, in der dritten ist $a = 8$ und $e = \frac{1}{2}$, in der vierten ist $a = 9$ und $e = -\frac{2}{3}$.

Setzt man $e = 1$, so erhält man folgende Reihe:

$$a, \quad a, \quad a, \quad a, \quad a, \quad a \ldots$$

Eine Reihe mit lauter gleichen Gliedern ist daher eben so wohl eine arithmetische als eine geometrische Reihe.

§. 248. Lehrsatz.

Wenn man die Anzahl der Glieder einer geometrischen Reihe mit n und die Summe der Reihe mit S bezeichnet, so ist

$$1) \quad t = ae^{n-1}$$

und

$$2) \quad S = \frac{et - a}{e - 1} = \frac{a(e^n - 1)}{(e - 1)}.$$

Bew. 1) Das erste Glied der Reihe ist a, das zweite ae, das dritte ae^2, das vierte ae^3 u. s. w. Auf diesem Wege fortfahrend, findet man leicht, daß z. B. das neunte Glied $= ae^8$ und überhaupt das nte Glied $t = ae^{n-1}$ ist.

2) Um die Summe der Reihe zu finden, bilden wir zunächst die Gleichung

$$S = a + ae + ae^2 \ldots\ldots + \frac{t}{e} + t$$

und multipliciren dann diese ganze Gleichung mit e, wodurch wir erhalten

$$eS = ae + ae^2 + \ldots\ldots + t + et.$$

Hierauf subtrahiren wir von dieser Gleichung die vorhergehende, so ergibt sich

$$eS - S = et - a$$

oder

$$(e - 1)S = et - a,$$

folglich

$$S = \frac{et - a}{e - 1}.$$

Zufolge (1) ist

$$t = ae^{n-1}, \text{ also } et = ae^n.$$

Setzen wir diesen Werth in den so eben für S erhaltenen Ausdruck ein, so verwandelt sich derselbe in

$$S = \frac{ae^n - a}{e - 1} = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}.$$

Ist z. B. gegeben $a = 5$, $e = 4$ und $n = 7$, so ist

$$t = 5 \,.\, 4^6 = 5 \,.\, 4096 = 20480$$

$$S = \frac{et - a}{e - 1} = \frac{4 \,.\, 20480 - 5}{3} = \frac{81915}{3} = 27305.$$

Zur weiteren Uebung können die folgenden Beispiele dienen.

Wenn gegeben ist

1)	$a = 6,$	$e = 2,$	$n = 10,$	so ist	$t = 3072,$	$S = 6138$
2)	$a = 4,$	$e = 3,$	$n = 8,$	" "	$t = 8748,$	$S = 13120$
3)	$a = 8,$	$e = \frac{3}{2},$	$n = 7,$	" "	$t = 91\frac{1}{8},$	$S = 257\frac{3}{8}$

4) $a = 10$, $e = \frac{4}{5}$, $n = 6$, so ist $t = 3\frac{173}{625}$, $S = 36\frac{558}{625}$

5) $a = 7,5$, $e = 1,38$, $n = 12$, „ „ $t = 259,2...$, $S = 921,5...$

6) $a = 1$, $e = \frac{1}{2}$, $n = 10$, „ „ $t = 0,00195..$, $S = 1,9980..$

In den beiden letzten Beispielen sind für t und S nur Näherungswerthe angegeben, welche am bequemsten mit Hilfe der Logarithmentafel erhalten werden.

§. 249. Zusatz.

Durch die Gleichung (1) des vorhergehenden §. wird man auch in den Stand gesetzt, wenn von den Buchstaben a, e, t, n irgend drei gegeben sind, den vierten zu finden, wie die folgende Zusammenstellung zeigt.

1) $t = ae^{n-1}$, $\log t = \log a + (n - 1) \log e$

2) $a = \frac{t}{e^{n-1}}$, $\log a = \log t - (n - 1) \log e$

3) $e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$, $\log e = \frac{\log t - \log a}{n - 1}$

4) $n = \frac{\log t - \log a}{\log e} + 1.$

Wir haben hier die Gleichung (2) des §. 248 gänzlich übergangen, weil mit Ausnahme der Rentenrechnung, von welcher weiter unten noch besonders gehandelt werden wird, die Berechnung der Summe einer geometrischen Reihe im Praktischen kaum irgend Anwendung findet. — Wir fügen nun noch einige Beispiele hinzu, welche Anwendungen der Formeln über die geometrische Reihe enthalten.

1) Ein König in Indien, Namens Sheran, soll dem Erfinder des Schachspiels aufgegeben haben, sich eine Belohnung zu erbitten. Dieser verlangte für das erste Schachfeld 1 Weizenkorn, für das zweite 2, für das dritte 4, für das vierte 8 und so fort für jedes folgende Feld doppelt so viel Weizenkörner als für das vorhergehende bis zum 64sten Felde. Wie groß ist die Summe aller dieser Weizenkörner?

Antw. 18446744073709551615.

Rechnet man auf einen Scheffel eine Million Weizenkörner, so beträgt die Summe aller Körner

18446744073709 Scheffel Weizen.

2) Wenn bei einer Luftpumpe nach dem ersten Kolbenzuge eine dreifache Verdünnung der Luft eintritt und die Verdünnung nach jedem folgenden Kolbenzuge in gleichem Verhältnisse zunimmt; wie groß würde dieselbe nach dem zehnten Kolbenzuge sein? — Antw. 59049fach.

3) Wenn die Intensität des Lichtes bei dem Durchgange desselben durch eine Glasscheibe um $1/4$ geschwächt wird, also die Intensität des durchgegangenen Lichtes nur noch $= 0,75$ ist, wenn ferner das Licht bei seinem Durchgange durch eine zweite, dritte Glasscheibe u. s. w. immer in gleichem Verhältnisse geschwächt wird, wie groß wird die Intensität des Lichtes sein, nachdem es durch zehn Scheiben hindurchgegangen ist? — Antw. 0,05631..

4) Wie groß ist das erste Glied einer aus 6 Gliedern bestehenden geometrischen Reihe, wenn das letzte Glied $= 728$ und der beständige Quotient $= 2^1/_4$ gegeben ist? — Antw. 12,62.

5) Das erste Glied einer geometrischen Reihe ist $= 2$ und das neunte $= 305$; wie groß ist der beständige Quotient? — Antw. 1,874..

6) Wie groß ist das achte Glied einer geometrischen Reihe, wenn das vierte Glied $= 27$ und das dreizehnte Glied $= 729$ ist? — Antw. 116,8..

7) Wie die Physik lehrt, macht die Octave in der Secunde doppelt so viel Schwingungen als der Grundton; wenn man nun nach ganz gleichen Verhältnissen vom Grundtone zur Octave fortschreiten wollte, mit welcher Zahl würde man die Schwingungszahl jedes vorhergehenden Tones multipliciren müssen, um die des folgenden zu erhalten? — Antw. Mit $\sqrt[7]{2} = 1{,}104..$

Auch eine Reihe, welche man erhält, wenn man die Glieder einer geometrischen Reihe mit den natürlichen Zahlen, das erste mit 1, das zweite mit 2, das dritte mit 3 u. s. w. multiplicirt, läßt sich ohne Schwierigkeit summiren. Bezeichnen wir die Summe dieser Reihe mit S, so erhalten wir zunächst die Gleichung

$$S = a + 2ae + 3ae^2 \ldots\ldots + (n-1)\,ae^{n-2} + nae^{n-1};$$

multipliciren wir beiderseits mit e, so bekommen wir weiter

$$eS = ae + 2ae^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1)ae^{n-1} + nae^n,$$

und wenn wir von dieser die vorhergehende Gleichung subtrahiren,

$$(e-1)S = nae^n - (a + ae + ae^2 \ldots\ldots\ldots + ae^{n-1}),$$

wofür wir nach §. 248 auch setzen können

$$(e-1)S = nae^n - \frac{a(e^n-1)}{e-1} = \frac{a(ne^{n+1} - (n+1)e^n + 1)}{e-1},$$

also $$S = \frac{a(ne^{n+1} - (n+1)e^n + 1)}{(e-1)^2}.$$

In ganz ähnlicher Weise läßt sich überhaupt die Summe einer Reihe finden, welche hervorgeht, wenn man die gleichgroßen Glieder einer mathematischen und einer geometrischen Reihe mit einander multiplicirt.

Anhang.

Die Rentenrechnung.

Unter einer Rente versteht man eine in gleichen Terminen, z. B. jährlich mehrmals zu zahlende Summe. Bezeichnen wir die Rente mit r, und rechnen wir zusammengesetzte Zinsen, so sind die gegenwärtigen Werthe der am Ende des 1ten, 2ten..... n — 1ten, nten Jahres zu leistenden Zahlungen

$$\frac{r}{p},\ \frac{r}{p^2} \ldots\ldots \frac{r}{p^{n-1}},\ \frac{r}{p^n}.$$

Bezeichnen wir daher mit w den gegenwärtigen Werth aller einzelnen Zahlungen zusammen, so erhalten wir die Gleichung

$$w = \frac{r}{p} + \frac{r}{p^2} \ldots\ldots + \frac{r}{p^{n-1}},\ \frac{r}{p^n}.$$

Multipliciren wir, um die Brüche wegzuschaffen, die ganze Gleichung mit p^n, so erhalten wir weiter

$$wp^n = rp^{n-1} + rp^{n-2} \ldots\ldots\ldots + rp + r,$$

oder wenn wir umgekehrt ordnen,

$$wp^n = r + rp + rp^2 \ldots\ldots\ldots + rp^{n-1}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine geometrische Reihe mit dem Anfangsgliede a = r, dem beständigen Quotienten e = p und der Anzahl der Glieder n = n. Summiren wir dieselbe daher nach §. 248, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$wp^n = \frac{r(p^n-1)}{p-1}.$$

Demnach ist 1) $w = \frac{r(p^n - 1)}{p^n(p - 1)}$.

Diese Gleichung lehrt zunächst den gegenwärtigen Werth w einer n Jahre nach einander zahlbaren Rente r finden. Sie kann ferner auch dazu dienen, r zu bestimmen, wenn w, p und n gegeben sind. Denn aus der Gleichung (1) ergibt sich leicht

$$2)\quad r = \frac{wp^n(p - 1)}{p^n - 1}.$$

Weiter können auch in der Gleichung (1) w, p und r gegeben sein und n gesucht werden. Da n ein Exponent einer Potenz ist, so gehört die Gleichung zu den Exponentalgleichungen. Setzen wir demgemäß $p^n = z$, so verwandelt sich dieselbe in

$$w = \frac{r(z - 1)}{z(p - 1)}.$$

Suchen wir zunächst aus dieser Gleichung z, indem wir den Bruch wegschaffen und in gewöhnlicher Weise weiter rechnen, so erhalten wir

$$w(p - 1)z = r(z - 1) = rz - r,$$

folglich $$rz - w(p - 1)z = r$$

und daher $$z \text{ oder } p^n = \frac{r}{r - w(p - 1)}.$$

Nehmen wir nun auf beiden Seiten der Gleichung die Logarithmen, so ergibt sich

$$n \log p = \log r - \log [r - w(p - 1)],$$

also $$3)\quad n = \frac{\log r - \log [r - w(p - 1)]}{\log p}.$$

Diese Gleichung lehrt, wie oft man für eine heute auszuzahlende Summe w eine jährliche Rente r beziehen kann. Sie setzt als Bedingung voraus, daß $r > w \cdot (p - 1)$ ist; und in der That kann man sich leicht überzeugen, daß die Aufgabe nur dann möglich ist, wenn diese Bedingung erfüllt ist. Denn wenn z. B. $p = 1{,}05$ ist, also 5 Procent Zinsen berechnet werden, so drückt $w(p - 1) = w \cdot \frac{5}{100}$ die jährlichen Zinsen der Summe w aus. Wer nun heute die Summe w ausleiht, kann sich am Ende jedes Jahres an Zinsen $w \cdot \frac{5}{100} = w(p - 1)$ zahlen lassen und hat am Ende des nten Jahres noch die ganze Summe w zu fordern. In der hier behandelten Aufgabe soll aber der, welcher gegenwärtig die Summe w zahlt, nur n Jahre nach einander die Rente r beziehen können und dann nichts mehr zu fordern haben; es muß daher offenbar die Rente größer als die jährlichen Zinsen des Capitals, also $r > w \cdot (p - 1)$ sein.

Endlich wollen wir noch bemerken, daß sich n aus der Gleichung (3) als eine ganze Zahl ergeben muß. Würde n als ein Bruch, z. B. = 12,6 erhalten, so würde hieraus hervorgehen, daß die Summe w mehr als eine zwölfmal am Ende jedes Jahres, aber weniger als eine dreizehnmal am Ende jedes Jahres zu zahlende Rente r werth ist.

Die drei vorstehenden Gleichungen lehren w, ferner r und endlich n finden, wenn alles andere als bekannt vorausgesetzt wird. Es bleibt noch die Aufgabe übrig, p zu berechnen, wenn w, r und n gegeben sind. Diese Aufgabe würde jedoch die Auflösung der folgenden Gleichung

$$wp^n = rp^{n-1} + rp^{n-2} \ldots + rp + r,$$

welche in Beziehung auf p vom nten Grade ist, erfordern, weshalb wir auf die allgemeine Auflösung dieser Aufgabe verzichten müssen.

Als Anwendungen der obigen drei Gleichungen können die folgenden Beispiele dienen, für welche wir, um größerer Deutlichkeit willen, die vollständige Ausrechnung hersetzen.

1) Welches ist der gegenwärtige Werth einer 13 Jahre nach einander zu beziehenden Rente von 400 Thlrn., wenn die Zinseszinsen zu 3 Procent berechnet werden? — Antw. 4254 Thlr. ohngefähr

$$w = \frac{r(p^n - 1)}{p^n(p - 1)}$$

$$\begin{array}{rl} \log p = & 0{,}01284 \\ & 13 \\ \hline & 3852 \\ & 1284 \\ \hline \log p^n = & 0{,}16692 \\ p^n = & 1{,}4686 \\ p^n - 1 = & 0{,}4686 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log r = & 2{,}60206 \\ + \log (p^n - 1) = & 0{,}67080 - 1 \\ \hline & 2{,}27286 \\ - \log p^n = & 0{,}16692 \\ \hline & 2{,}10594 \\ - \log (p - 1) = & 0{,}47712 - 2 \\ \hline & 3{,}62882 \\ \text{Num.} = & 4254. \end{array}$$

2) Jemand besitzt ein Capital von 5000 Thlrn. und wünscht dasselbe gegen eine jährliche 30 Jahre nach einander zu beziehende Rente zu vertauschen; wie groß wird diese Rente sein, wenn die Zinsen zu 5 Procent berechnet werden? — Antw. 325,2.. Thlr.

$$r = \frac{w(p - 1)p^n}{p^n - 1}$$

$$\begin{array}{rl} \log p = & 0{,}02119 \\ & 30 \\ \hline \log p^n = & 0{,}63570 \\ p^n = & 4{,}322 \\ p^n - 1 = & 3{,}322 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log w = & 3{,}69897 \\ + \log (p - 1) = & 0{,}69897 - 2 \\ + \log p^n = & 0{,}63570 \\ \hline & 3{,}03364 \\ \log (p^n - 1) = & 0{,}52140 \\ \hline & 2{,}51224 \\ \text{Num.} = & 325{,}3.. \end{array}$$

3) Jemand will ein Capital von 10000 Thlrn. in eine jährliche Rente von 1800 Thlrn. verwandeln; wie lange wird er diese Rente beziehen können, wenn die Zinseszinsen mit 4 Procent berechnet werden? — Antw. 6 bis 7 Jahre.

$$n = \frac{\log r - \log [r - (p - 1)w]}{\log p}$$

$$r = 1800,\ p = 1{,}04,\ r - (p - 1)w = 1800 - 400 = 1400$$

$$\begin{array}{rl} \log 1800 = & 3{,}25527 \\ \log 1400 = & 3{,}14613 \\ \hline \log 1{,}04 = 0{,}01703 \mid & 0{,}10904 \mid 6 \\ & 10218 \\ \hline & 686 \end{array}$$

Endlich wollen wir noch folgende Aufgabe kurz behandeln: Ein Capital a ist n Jahre nach einander zum Zinsfuß p ausgeliehen und wird außerdem, daß die Zinsen zum Capitale geschlagen werden, noch am Ende jedes Jahres um die Summe b vermehrt; wie groß ist der Werth w, welchen dieses Capital am Ende des nten Jahres erlangt? — Antw. $w = ap^n + \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$.

Bew. Das Capital a erlangt in n Jahren bekanntlich die Größe ap^n, die am Ende des ersten, zweiten Jahres u. s. f. erfolgenden Zahlungen b stehen beziehlich $n - 1$, $n - 2$ Jahre auf Zinsen und erlangen also die Größen bp^{n-1}, bp^{n-2} u. s. w. Die vorletzte Zahlung steht nur ein Jahr auf Zinsen und geht also in bp über und die

am Ende des letzten Jahres erfolgende Zahlung b steht gar nicht auf Zinsen und bleibt folglich unverändert. Demnach ist

$$w = ap^n + bp^{n-1} + bp^{n-2} \ldots\ldots + bp + b$$

oder

$$w = ap^n + (b + bp + bp^2 \ldots + bp^{n-1}).$$

Der eingeschlossene Theil dieses Ausdrucks bildet eine geometrische Reihe; summiren wir dieselbe nach §. 248, so erhalten wir

$$4) \quad w = ap^n + \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}.$$

Sollte das Capital a am Ende jedes Jahres nicht um die Summe b vermehrt, sondern vermindert werden, so würde man auf ganz ähnliche Weise finden

$$5) \quad w = ap^n - \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich die obige Gleichung (1) als ein besonderer Fall ableiten, wenn man in der Gleichung (5) $w = o$ und $b = r$ setzt und an die Stelle von a w schreibt.

C. Von den figurirten Zahlen.

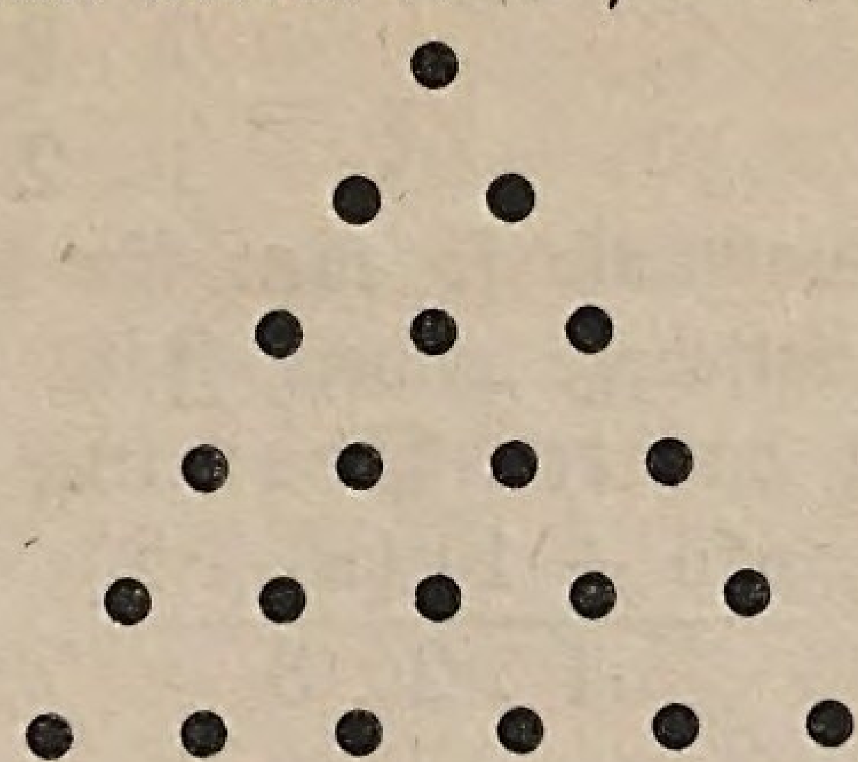
§. 250. Erklärung.

Wenn man aus der Reihe der natürlichen Zahlen eine zweite Reihe auf die Art bildet, daß man zunächst die erste Zahl (1) für sich hinstellt, dann zur ersten Zahl die zweite (2) addirt, zur erhaltenen Summe die dritte Zahl (3) addirt, zu dieser Summe die vierte Zahl (4) addirt u. s. w., wenn man ferner aus der so gebildeten Reihe in ganz gleicher Weise eine dritte, aus der dritten eine vierte Reihe u. s. f. ableitet, so werden die so gebildeten Reihen die Reihen der figurirten Zahlen genannt. Die Reihe der natürlichen Zahlen heißt die Reihe der ersten Ordnung; die aus dieser zunächst gebildete Reihe wird die Reihe der zweiten Ordnung, die aus dieser abgeleitete die Reihe der dritten Ordnung genannt u. s. w.

Die folgende Zusammenstellung gibt die 12 ersten Zahlen der Reihen der 6 ersten Ordnungen an.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7
3	6	10	15	21	28
4	10	20	35	56	84
5	15	35	70	126	210
6	21	56	126	252	462
7	28	84	210	462	924
8	36	120	330	792	1716
9	45	165	495	1287	3003
10	55	220	715	2002	5005
11	66	286	1001	3003	8008
12	78	364	1365	4368	12376

Die Zahlen der zweiten Ordnung werden auch Trigonalzahlen genannt, weil dieselben durch Dreiecke dargestellt werden können, wie folgende Figur zeigt:



Hier bilden zunächst 3, dann 6, 10, 15, 21 Punkte ein Dreieck. — Die Zahlen der dritten Ordnung führen auch den Namen Pyramidalzahlen, weil man dieselben durch in Form einer Pyramide aufgeschichtete Kugelhaufen darstellen kann. Die Spitze dieser Pyramide bildet eine Kugel, welche von drei darunter befindlichen Kugeln getragen wird, wodurch also eine gleichseitige aus 4 Kugeln bestehende Pyramide entsteht. Die drei Kugeln, welche die Basis dieser Pyramide bilden, ruhen wieder auf 6 Kugeln, und diese Kugelschicht bildet mit den auf ihr ruhenden Kugeln eine aus $1 + 3 + 6 = 10$ Kugeln bestehende Pyramide u. s. w.

Die Zahlen der vierten und der folgenden Ordnungen lassen sich jedoch nicht mehr durch eine derartige geometrische Construction darstellen.

§. 251. Lehrsatz.

Die nte Zahl der zweiten Ordnung ist $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$.

Bew. Die nte Zahl der zweiten Ordnung ist gleich der Summe der n ersten natürlichen Zahlen; diese Zahlen bilden aber eine arithmetische Reihe und ihre Summe wird folglich nach §. 245 erhalten, wenn wir das erste Glied (1) und das letzte Glied (n) addiren und die entstandene Summe mit der Hälfte der Anzahl (n) der Glieder multipliciren. Dieselbe ist daher

$$= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}.$$

§. 252. Lehrsatz.

Die nte Zahl der dritten Ordnung ist $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Bew. Wir wollen zunächst die 7te Zahl der dritten Ordnung suchen und dieselbe mit x bezeichnen.

Nach §. 250 ist die gesuchte Zahl x gleich der Summe der 7 ersten Zahlen der zweiten Ordnung. Drücken wir diese Zahlen nach der Formel des vorherg. §. aus, so erhalten wir die Gleichung

$$\text{I. } x = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} + \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2},$$

oder wenn wir die ganze Gleichung mit $1 \cdot 2 \cdot 3$ multipliciren*):

$$\text{II. } 1.2.3.x = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + 5.6.3 + 6.7.3 + 7.8.3$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
1 \cdot 2 \cdot 3 &= & &1 \cdot 2 \cdot 3 \\
2 \cdot 3 \cdot 3 &= 2 \cdot 3 \cdot (4 - 1) &= &2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \\
3 \cdot 4 \cdot 3 &= 3 \cdot 4 \cdot (5 - 2) &= &3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \\
4 \cdot 5 \cdot 3 &= 4 \cdot 5 \cdot (6 - 3) &= &4 \cdot 5 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot 5 \\
5 \cdot 6 \cdot 3 &= 5 \cdot 6 \cdot (7 - 4) &= &5 \cdot 6 \cdot 7 - 4 \cdot 5 \cdot 6 \\
6 \cdot 7 \cdot 3 &= 6 \cdot 7 \cdot (8 - 5) &= &6 \cdot 7 \cdot 8 - 5 \cdot 6 \cdot 7 \\
7 \cdot 8 \cdot 3 &= 7 \cdot 8 \cdot (9 - 6) &= &7 \cdot 8 \cdot 9 - 6 \cdot 7 \cdot 8
\end{aligned}$$

*) Den Nutzen dieser Multiplication wird sehr bald das Folgende zeigen.

also vermöge Gleichung II., wenn wir summiren,

$$\text{III.}\quad 1 . 2 . 3 . x = 7 . 8 . 9$$

und daher

$$\text{IV.}\quad x = \frac{7 . 8 . 9}{1 . 2 . 3}.$$

Da sich nun dasselbe, was wir so eben für die Zahl 7 erwiesen haben, in gleicher Weise für jede beliebige andere Zahl darthun läßt, so erhalten wir für die nte Zahl der dritten Ordnung die Formel

$$\frac{n(n + 1)(n + 2)}{1 . 2 . 3}.$$

§. 253. Lehrsatz.

Die nte Zahl der vierten Ordnung ist

$$= \frac{n(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{1 . 2 . 3 . 4}.$$

Beweis. Wir wollen den Beweis wieder zunächst für eine bestimmte Zahl, z. B. für die 5te Zahl der vierten Ordnung führen und dieselbe mit y bezeichnen. Dann ist nach §. 250 die gesuchte Zahl y gleich der Summe der 5 ersten Zahlen der dritten Ordnung, also zufolge des vorhergehenden §.

$$\text{I.}\quad y = \frac{1 . 2 . 3}{1 . 2 . 3} + \frac{2 . 3 . 4}{1 . 2 . 3} + \frac{3 . 4 . 5}{1 . 2 . 3} + \frac{4 . 5 . 6}{1 . 2 . 3} + \frac{5 . 6 . 7}{1 . 2 . 3}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit 1 . 2 . 3 . 4, so verwandelt sich dieselbe in

$$\text{II.}\quad 1.2.3.4.y = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + 4.5.6.4 + 5.6.7.4.$$

Zerlegen wir den Factor 4 bei den einzelnen Gliedern in ähnlicher Weise wie wir dies im vorhergehenden §. gethan haben, so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

$$\begin{aligned}
1 . 2 . 3 . 4 &= & &1 . 2 . 3 . 4 \\
2 . 3 . 4 . 4 &= 2 . 3 . 4 . (5 - 1) &&= 2 . 3 . 4 . 5 - 1 . 2 . 3 . 4 \\
3 . 4 . 5 . 4 &= 3 . 4 . 5 . (6 - 2) &&= 3 . 4 . 5 . 6 - 2 . 3 . 4 . 5 \\
4 . 5 . 6 . 4 &= 4 . 5 . 6 . (7 - 3) &&= 4 . 5 . 6 . 7 - 3 . 4 . 5 . 6 \\
5 . 6 . 7 . 4 &= 5 . 6 . 7 . (8 - 4) &&= 5 . 6 . 7 . 8 - 4 . 5 . 6 . 7.
\end{aligned}$$

Summiren wir, so ergibt sich vermöge Gleichung II.

$$\text{III.}\quad 1 . 2 . 3 . 4 . y = 5 . 6 . 7 . 8,$$

also

$$\text{IV.}\quad y = \frac{5 . 6 . 7 . 8}{1 . 2 . 3 . 4}.$$

Nun läßt sich aber das für die Zahl 5 Erwiesene offenbar eben so für jede beliebige Zahl n darthun; es ist daher überhaupt die nte Zahl der vierten Ordnung $= \frac{n(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{1 . 2 . 3 . 4}$.

§. 254. Zusatz.

Da sich, wie leicht zu sehen, die Ableitungen der beiden vorhergehenden §§. in ähnlicher Weise auch auf alle folgenden Ordnungen ausdehnen lassen, so werden wir überhaupt für die nte Zahl der pten Ordnung die Formel aufstellen können

$$\frac{n(n + 1)(n + 2) \ldots\ldots (n + p - 1)}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots p}$$

Zur Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) Wie heißt die 20te Zahl der zweiten Ordnung? — Antw. 210.

2) Die 15te Zahl der dritten Ordnung? — Antw. 680.

3) Die 18te Zahl der vierten Ordnung? — Antw. 5985.

4) Die 14te Zahl der fünften Ordnung? — Antw. 8568.

5) Ein Kugelhaufen, welcher die Form einer dreiseitigen Pyramide hat, hat an der Spitze eine Kugel, in der darunter befindlichen Schicht 3, in der folgenden Schicht 6 Kugeln u. s. w. Wie viel Kugeln befinden sich in der untersten Schicht, wenn die Seite derselben 25 Kugeln enthält, und wie viel in der ganzen Pyramide? — Antw. 325 in der untersten Schicht und 2925 in der ganzen Pyramide.

6) Ein Kugelhaufen hat die Gestalt einer abgekürzten dreiseitigen Pyramide und in einer Seite der obersten Schicht 12, in einer Seite der untersten Schicht 24 Kugeln. Aus wie viel Kugeln besteht der ganze Haufen? — Antw. 2314.

Durch das Vorhergehende werden wir auch in den Stand gesetzt, die folgenden Aufgaben zu lösen.

I. Aufgabe. Die Summe der n ersten Quadratzahlen zu finden.

Aufl. Bezeichnen wir die gesuchte Summe mit $S(n^2)$, so ist

$$S(n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Bew. Nach §. 251 ist die nte figurirte Zahl der zweiten Ordnung

$$= \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2},$$

also diese Zahl doppelt genommen

$$= n(n+1) = n^2 + n.$$

Wenn wir nun eben so die auf einander folgenden figurirten Zahlen von der ersten bis zur nten nach §. 251 ausdrücken und, um das lästige Schreiben des bei allen wiederkehrenden Nenners 1 . 2 zu vermeiden, jede derselben doppelt nehmen, so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

$$\begin{aligned}
1 \,.\, 2 &= 1 \,.\, (1+1) = 1^2 + 1 \\
2 \,.\, 3 &= 2 \,.\, (2+1) = 2^2 + 2 \\
3 \,.\, 4 &= 3 \,.\, (3+1) = 3^2 + 3 \\
4 \,.\, 5 &= 4 \,.\, (4+1) = 4^2 + 4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n(n+1) &= \qquad\qquad n^2 + n.
\end{aligned}$$

Zufolge dieser Zusammenstellung ist die Summe der doppelt genommenen n ersten figurirten Zahlen der zweiten Ordnung gleich der Summe der n ersten Quadratzahlen vermehrt um die Summe der n ersten natürlichen Zahlen.

Nun ist nach §. 252 die Summe der n ersten figurirten Zahlen der zweiten Ordnung $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ und die doppelt genommene Summe folglich $= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, ferner nach §. 251 die Summe der n ersten natürlichen Zahlen $= \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2}$. Bezeichnen wir daher die Summe der n ersten Quadratzahlen mit $S(n^2)$, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = S(n^2) + \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2},$$

folglich

$$S(n^2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$$

oder

$$S(n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Hiernach ist z. B. die Summe der 30 ersten Quadratzahlen

$$= \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9455.$$

II. Aufgabe. Die Summe der n ersten Kubikzahlen, welche wir mit $S(n^3)$ bezeichnen wollen, zu finden.

Aufl.
$$S(n^3) = \left(\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right)^2.$$

Bew. Nach §. 252 ist die nte figurirte Zahl der 3ten Ordnung gleich

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n,$$

d. h. die nte figurirte Zahl der dritten Ordnung ist gleich der Summe aus dem 6ten Theile der nten Kubikzahl, der Hälfte der nten Quadratzahl und dem 3ten Theile der nten natürlichen Zahl. Man sieht daher, auch ohne daß wir die auf einander folgenden figurirten Zahlen in ähnlicher Art, wie wir dies bei der vorhergehenden Aufgabe gethan haben, zerfällen, leicht ein, daß die Summe der n ersten figurirten Zahlen der dritten Ordnung gleich ist der Summe aus dem 6ten Theile der Summe der n ersten Kubikzahlen, der Hälfte der Summe der n ersten Quadratzahlen und dem dritten Theil der Summe der n ersten natürlichen Zahlen.

Nun ist die Summe der n ersten figurirten Zahlen der dritten Ordnung gleich der nten figurirten Zahl der vierten Ordnung, also

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

die Summe der n ersten Quadratzahlen, wie wir oben gesehen haben,

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

und die Summe der n ersten natürlichen Zahlen

$$= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}.$$

Bezeichnen wir daher die Summe der n ersten Kubikzahlen mit $S(n^3)$, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{6}S(n^3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},$$

folglich
$$S(n^3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) \cdot [(n+2) \cdot (n+3) - 2 \cdot (2n+1) - 4]}{4}$$

$$= \frac{n(n+1) \cdot (n^2+n)}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right)^2.$$

So ist z. B. die Summe der 20 ersten Kubikzahlen

$$= \left(\frac{20 \cdot 21}{1 \cdot 2}\right)^2 = 44100.$$

III. Aufgabe. Die folgende Reihe

$$1 \cdot m + 2 \cdot (m+1) + 3 \cdot (m+2) + 4 \cdot (m+3) \dots + n(m+n-1)$$

zu summiren.

Aufl. Die gesuchte Summe ist gleich

$$\frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Beweis. Das allgemeine Glied der Reihe ist

$$n(m + n - 1) = m \cdot n + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{1 \cdot 2},$$

d. h. dieses Glied ist gleich der Summe aus der mmal genommenen nten natürlichen Zahl und der doppelt genommenen n — 1ten figurirten Zahl der zweiten Ordnung. Es muß daher auch die Summe der Reihe gleich sein der Summe aus der mit m multiplicirten Summe der n ersten natürlichen Zahlen und der doppelt genommenen Summe der n — 1 ersten figurirten Zahlen der zweiten Ordnung; demnach ist die gesuchte Summe gleich

$$m \cdot \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + 2 \cdot \frac{(n-1)\,n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1) \cdot (3m + 2n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Man wird leicht bemerken, daß diese Aufgabe die vorvorhergehende, die Quadratzahlen zu summiren, als einen speziellen Fall in sich schließt, welcher hervorgeht, wenn man $m = 1$ setzt.

In Zeughäusern werden häufig Kugelhaufen in der Art aufgeschichtet, daß die oberste Schicht aus einer Reihe von m Kugeln besteht, welche auf 2 Reihen ruht, deren jede $m + 1$ Kugeln enthält, welche dann wieder auf 3 Reihen liegen, deren jede $m + 2$ Kugeln enthält u. s. w., so daß also, wenn überhaupt n Schichten vorhanden sind, die Zahl der Kugeln in der untersten Schicht gleich ist

$$n(m + n - 1)$$

und zufolge der eben gelösten Aufgabe die Zahl der in dem ganzen Haufen enthaltenen Kugeln gleich ist

$$\frac{n(n+1)(3m + 2n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Enthält z. B. die oberste Reihe eines so gebildeten Haufens 12 Kugeln und sind 15 übereinander liegende Schichten vorhanden, so ist die Zahl der Kugeln in der untersten Schicht $= 15 \cdot 26 = 390$ und die Zahl der Kugeln des ganzen Haufens

$$= \frac{15 \cdot 16 \cdot 64}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2560.$$

Achter Abschnitt.

Von den combinatorischen Operationen und dem binomischen Lehrsatze.

Bemerkung.

Die zunächst folgenden Sätze haben einen von den übrigen so abweichenden Charakter, daß es fast zweifelhaft erscheinen möchte, ob sie überhaupt zur reinen Arithmetik gehören. Sie stehen aber mit den vorangegangenen Lehren in sofern in einem innigen Zusammenhange, als sie die Entwickelung des Binomiums $(a + b)^m$ vermitteln.

A. Permutationen.

§. 255. Erklärung.

Eine bestimmte Verbindung mehrerer Dinge oder Elemente wird eine Complexion oder Form genannt. — Man bezeichnet die Elemente gewöhnlich durch die Buchstaben a, b, c... oder durch die Ziffern 1, 2, 3...

Gegebene Elemente permutiren heißt dieselben in jeder möglichen Ordnung versetzen.

Sind zwei Elemente a und b gegeben, so sind die möglichen Versetzungen folgende:

ab
ba

Drei Elemente, a, b, c lassen sich in folgender Art permutiren:

abc
acb
bac
bca
cab
cba

Vier Elemente a, b, c, d geben folgende Permutationsformen:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbca
acdb	bcda	cbda	dbac
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Nicht selten ist es auch der Fall, daß die zu permutirenden Elemente nicht sämmtlich von einander verschieden sind, sondern unter denselben mehrere gleiche vorkommen. Sind z. B. die Elemente aabbc zu permutiren, so sind die Permutationsformen folgende:

aabbc	acbab	bbcaa
aabcb	acbba	bcaab
aacbb	baabc	bcaba
ababc	baacb	bcbaa
abacb	babac	caabb
abbac	babca	cabab
abbca	bacab	cabba
abcab	bacba	cbaab
abcba	bbaac	cbaba
acabb	bbaca	cbbaa

§. 256. Zusatz.

Um mit Sicherheit alle möglichen Permutationsformen zu erhalten, pflegt man in der ersten Form die Elemente nach ihrer natürlichen Reihenfolge hinzuschreiben und jede folgende Form aus der vorangehenden in der Weise herzuleiten, daß man die späteste Stelle aufsucht, welche sich durch ein folgendes höheres Element besetzen läßt, dann an diese Stelle das niedrigste der folgenden höheren Elemente setzt und die übrigen Elemente nach ihrer natürlichen Ordnung folgen läßt. Auf diese Art fährt man nun so lange fort, bis man endlich zu einer Form gelangt, in welcher die Elemente in umgekehrter Ordnung, wie in der ersten Form auf einander folgen, also kein höheres auf ein niedrigeres folgt. So läßt sich z. B. in der Form abacb die vierte Stelle c durch kein folgendes Element, wohl aber die dritte a und zwar zunächst durch b erhöhen; die nächstfolgende Form ist daher abbac.

§. 257. Lehrsatz.

Die Zahl der möglichen Permutationen ist

für 2 ungleiche Elemente $= 1 . 2$

„ 3 „ „ $= 1 . 2 . 3$

„ 4 „ „ $= 1 . 2 . 3 . 4$

überhaupt „ m „ „ $= 1 . 2 . 3 \ldots . m$.

Bew. Zwei Elemente a und b lassen nur zwei Versetzungen zu, ab und ba.

Sind drei Elemente a, b, c gegeben, so gibt es zwei Formen, welche mit a anfangen, ferner zwei Formen, welche mit b und zwei Formen, welche mit c anfangen, also im Ganzen $2 . 3 = 6$ verschiedene Formen.

Sind vier Elemente a, b, c, d gegeben, so gibt es zunächst sechs Formen, welche mit a anfangen, weil die übrigen drei Elemente b, c, d sich sechsmal versetzen lassen; eben so muß es sechs Formen geben, welche mit b, ferner sechs Formen, welche mit c und endlich sechs Formen, welche mit d anfangen. Im Ganzen müssen also $6 . 4 = 1 . 2 . 3 . 4 = 24$ Formen vorhanden sein.

Sind fünf Elemente a, b, c, d, e gegeben, so müssen zunächst 24 Formen mit a anfangen, weil sich die übrigen vier Elemente b, c, d, e 24mal versetzen lassen; aus gleichen Gründen müssen 24 Formen mit b, ferner 24 Formen mit c, 24 Formen mit d und 24 Formen mit e anfangen. Die Anzahl sämmtlicher Formen ist daher $= 24 . 5 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$.

Man sieht nun leicht, wie sich der Beweis weiter für 6, 7 . . . Elemente führen läßt, und daß überhaupt die Zahl der möglichen Versetzungen für m Elemente gleich ist $1 . 2 . . . . . m$.

§. 258. Lehrsatz.

Sind m Elemente gegeben und befinden sich unter denselben p gleiche, so ist die Zahl aller Permutationen

$$= \frac{1 . 2 . 3 . . . . m.}{1 . 2 . . . p}$$

Bew. Um größerer Deutlichkeit willen wollen wir den Beweis an einem bestimmten Beispiele führen und zwar zunächst die folgenden sechs verschiedenen Elemente $a_1 a_2 a_3 bcd$ als gegeben annehmen. Permutiren wir dieselben vollständig, so erhalten wir nach dem vorhergehenden §. $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720$ Formen. Löschen wir hierauf überall an den Elementen a_1, a_2 und a_3 die beigesetzten Ziffern aus, so werden eine Menge Formen nicht mehr von einander verschieden sein, nämlich alle diejenigen Formen, welche nur durch die Stellung der Elemente a_1, a_2 und a_3 von einander unterschieden waren und in der Stellung der anderen Elemente b, c, d übereinstimmten. Es müssen daher überhaupt jetzt je so viel Formen in eine zusammenfallen, als die drei Elemente a_1, a_2 und a_3 Versetzungen zulassen. Da sich nun nach dem vorhergehenden §. drei Elemente $1 . 2 . 3 = 6$mal permutiren lassen, so fallen von den zuerst erhaltenen $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720$ Formen je $1 . 2 . 3 = 6$ Formen in eine zusammen, und die Zahl der nun noch übrig bleibenden verschiedenen Formen ist folglich

$$\frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}{1 . 2 . 3} = 120.$$

Sind überhaupt m Elemente und darunter p gleiche gegeben, so würde die Permutationszahl, wenn alle Elemente verschieden wären, gleich sein

$$1 . 2 . 3 . . . . m.$$

Werden aber p Elemente einander gleich gesetzt, so fallen je $1 . 2 . . . p$ Formen zusammen, und es bleiben nur noch

$$\frac{1 . 2 . 3 . . . . m}{1 . 2 . . . p}$$

verschiedene Formen übrig.

§. 259. Zusatz.

Sind m Elemente gegeben und befinden sich unter denselben p gleiche einer Art und q gleiche einer andern Art, so ist die Anzahl aller aus diesen Elementen zu bildenden Permutationen

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . m}{1 \,.\, 2 \ldots p \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots q}.$$

Der Beweis ist in ähnlicher Art zu führen, wie der des vorhergehenden §.

Zur Einübung der letzten Sätze können folgende Beispiele dienen:

Welches ist die Versetzungszahl für folgende Formen:

1) abcdefg? — Antw. 5040.
2) abcdefghik? — Antw. 3628800.
3) abbbcde? — Antw. 840.
4) abccccd? — Antw. 336.
5) aabccd? — Antw. 180.
6) aaabcccc? — Antw. 280.
7) abbcccdd? — Antw. 1680.
8) aaaabbccd? — Antw. 3780.
9) aaaaabbb? — Antw. 56.
10) aaaabbbbbb? — Antw. 210.

11) Wie viel Versetzungen lassen die Buchstaben in dem Worte ROMA zu? — Antw. 24.

12) Wie viele in dem Worte CICERO? — Antw. 360.

13) Wie viele in dem Worte SALAMIS? — Antw. 1260.

14) Wie oft können 8 auf einer Bank sitzende Schüler ihre Plätze wechseln? — Antw. 40320mal.

15) Wie viele unter den sämmtlichen Permutationsformen von abcdef fangen mit a, mit ab, mit abc an? — Antw. 120 Formen fangen mit a, 24 mit ab, 6 mit abc an.

16) Wie viele unter den aus aabbbc zu bildenden Permutationen fangen mit a, mit b, mit c, mit aa, mit ab, mit ac, mit bb und mit bc an? — Antw. Mit a fangen 20 Formen an, mit b 30, mit c 10, mit aa 4, mit ab 12, mit ac 4, mit bb 12, mit bc 6.

B. Combinationen.

§. 260. Erklärung.

Gegebene Elemente zu zweien, dreien u. s. w. combiniren, heißt dieselben auf alle mögliche Weise zu zweien, dreien u. s. w. verbinden, wobei jedoch Formen, welche sich nur durch die Stellung ihrer Elemente unterscheiden, als nicht verschieden angesehen werden. Formen, welche gleich viel Elemente enthalten, bilden eine Abtheilung oder Classe. Man unterscheidet ferner Combinationsformen mit und ohne Wiederholung; bei den Combinationsformen ohne Wiederholung darf das nämliche Element in einer Form nur einmal vorkommen; bei den Combinationen mit Wiederholung kann jedes Element in einer Form beliebig oft stehn.

Sind z. B. sechs Elemente

a b c d e f

gegeben, so sind die Combinationsformen ohne Wiederholung in der ersten Classe

a   b   c   d   e   f

in der zweiten Classe

ab	bc	ce
ac	bd	cf
ad	be	de
ae	bf	df
af	cd	ef

in der dritten Classe

abc	ace	bcd	bef
abd	acf	bce	cde
abe	ade	bcf	cdf
abf	adf	bde	cef
acd	aef	bdf	def

in der vierten Classe

abcd	abef	bcde
abce	acde	bcdf
abcf	acdf	bcef
abde	acef	bdef
abdf	adef	cdef

in der fünften Classe

abcde
abcdf
abcef
abdef
acdef
bcdef

in der sechsten Classe abcdef.

Man sieht hieraus, daß die fünfte Classe eben so viel Formen enthält, als die erste, und die vierte Classe eben so viel Formen als die zweite, was einfach darauf beruht, daß es offenbar einerlei ist, von sechs Elementen je fünf wegnehmen oder je eins übrig lassen, je zwei wegnehmen oder je vier übrig lassen.

Sind ferner zum Combiniren mit Wiederholung die Elemente

a b c

gegeben, so sind die Formen in der ersten Classe

a b c

in der zweiten Classe

aa	bb
ab	bc
ac	cc

in der dritten Classe

aaa	acc
aab	bbb
aac	bbc
abb	bcc
abc	ccc

in der vierten Classe

aaaa	aacc	bbbb
aaab	abbb	bbbc
aaac	abbc	bbcc
aabb	abcc	bccc
aabc	accc	cccc

u. s. w.

§. 261. Zusatz.

Man wird leicht bemerken, daß die Zahl der Combinationsklassen, welche sich ohne gestattete Wiederholung aus gegebenen Elementen bilden lassen, der Anzahl der gegebenen Elemente gleich ist, daß z. B. aus fünf Elementen sich nur fünf Classen von Combinationsformen ohne Wiederholung bilden lassen, daß dagegen bei verstatteter Wiederholung die Zahl der Combinationsclassen ganz unbegrenzt ist.

§. 262. Lehrsatz.

Sind m Elemente zum Combiniren gegeben, so ist die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung

in der ersten Classe $= m$

„ „ zweiten „ $= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$

„ „ dritten „ $= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

„ „ vierten „ $= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ u. s. w.

Bew. Wir wollen um größerer Anschaulichkeit willen von einem bestimmten Beispiele ausgehen und annehmen, daß 7 Elemente

a b c d e f g

zum Combiniren gegeben sind. Dann bilden die gegebenen Elemente selbst die Formen der ersten Classe, und die Zahl dieser Formen ist folglich $= 7$ und eben so, wenn m Elemente gegeben sind, $= m$.

In der zweiten Classe fangen offenbar 6 Formen mit a, 5 Formen mit b, 4 mit c, 3 mit d, 2 mit e und 1 mit f an; die Zahl dieser Formen ist folglich

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}.$$

Da nun, wie leicht zu sehen, das für 7 Elemente Erwiesene sich in ganz gleicher Weise für jede andere Zahl derselben darthun läßt, so ist, wenn m Elemente gegeben sind, die Zahl der Combinationen ohne Wiederholung

in der zweiten Classe $= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$.

In der dritten Classe fangen offenbar so viel Formen mit a an, als sich die übrigen 6 Elemente b, c, d, e, f, g zu zweien combiniren lassen; diese Zahl ist aber zufolge des eben Erwiesenen $= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}$. — Eben so fangen mit b so viel Formen an, als sich die noch übrigen 5 Elemente c, d, e, f, g zu zweien combiniren lassen, und diese Zahl ist folglich $= \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}$.

Aus gleichen Gründen ist die Zahl der mit c anfangenden Formen $= \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}$. die Zahl der mit e beginnenden Formen $= \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ und die Zahl der mit f anfangenden Formen $\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 1$. — Die Zahl sämmtlicher Formen der dritten Classe ist folglich

$$= \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}.$$

Die Glieder dieser Reihe sind die 5 ersten figurirten Zahlen der zweiten Ordnung und ihre Summe ist folglich die 5te figurirte Zahl der dritten Ordnung, also

$$= \frac{5 \,.\, 6 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Da sich nun der Beweis eben so wie für die Zahl 7 für jede andere Zahl führen läßt, so ist überhaupt, wenn m Elemente gegeben sind, die Zahl der Combinationsformen ohne Wiederholung in der dritten Classe

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Auf ganz ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß bei m gegebenen Elementen die Zahl der Formen in der 4ten Classe gleich ist

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \text{ u. s. w.}$$

Anm. Sind z. B. 10 Elemente zum Combiniren ohne Wiederholung gegeben, so ist die Zahl der Combinationsformen

in der 1. Klasse $= \frac{10}{1} = 10$

" " 2. " $= \frac{10 \,.\, 9}{1 \,.\, 2} = 45$

" " 3. " $= \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 120$

" " 4. " $= \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 210$

" " 5. " $= \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 252$

" " 6. " $= \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 210$

" " 7. " $= \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7} = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 120$

" " 8. " $= \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8} = \frac{10 \,.\, 9}{1 \,.\, 2} = 45$

" " 9. " $= \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9} = \frac{10}{1} = 10$

Demnach ist bei Combinationen ohne Wiederholung
die Zahl der Formen in der 1. Classe gleich der Zahl der Formen in der 9. Classe
" " " " " " 2. " " " " " " " " 8. "
" " " " " " 3. " " " " " " " " 7. "
" " " " " " 4. " " " " " " " " 6. "

Die Erklärung dieser Erscheinung ist bereits in der Anm. zu §. 260 angegeben. Ueberhaupt ist, wenn m Elemente zum Combiniren ohne Wiederholung gegeben sind, die Zahl der Formen in der 1. Classe gleich der Zahl der Formen in der m — 1. Classe
" " " " " " 2. " " " " " " " " m — 2. "
" " " " " " 3. " " " " " " " " m — 3. "
u. s. w.

§. 263. Lehrsatz.

Sind m Elemente zum Combiniren mit Wiederholung gegeben ist, so ist die Zahl der Formen

in der ersten Classe $= m$

„ „ zweiten „ $= \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$

„ „ dritten „ $= \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

„ „ vierten „ $= \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ u. s. w.

Bew. Wir gehen wieder von einem bestimmten Beispiele aus und nehmen zunächst an, daß 6 Elemente

a b c d e f

zum Combiniren mit Wiederholung gegeben sind. Dann bilden auch hier die 6 gegebenen Elemente selbst die Formen der ersten Classe, und die Zahl dieser Formen ist folglich = 6 und eben so, wenn m Elemente gegeben sind, = m.

In der zweiten Classe fangen 6 Formen mit a, 5 mit b, 4 mit c, 3 mit d, 2 mit e und 1 mit f an. Die Zahl sämmtlicher Formen der zweiten Classe ist daher

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2}.$$

Eben so sieht man leicht, daß, wenn m Elemente gegeben sind, die Zahl der Combinationsformen mit Wiederholung in der zweiten Classe gleich ist

$$\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}.$$

In der dritten Classe fangen so viel Formen mit a an, als sich die gegebenen 6 Elemente zu zweien mit Wiederholung combiniren lassen, und diese Zahl ist vermöge des eben Erwiesenen $= \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2}$. — Mit b fangen so viele Formen an, als sich die 5 Elemente b, c, d, e, f zu zweien combiniren lassen; die Zahl derselben ist also $= \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}$. — Eben so ist die Zahl der mit c anfangenden Formen $= \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}$, die Zahl der mit d beginnenden Formen $= \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}$, die Zahl der Formen, welche mit e anfangen, $= \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ und endlich die Zahl der Formen, welche mit f anfangen, $= \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 1$. — Die Zahl sämmtlicher Formen der dritten Classe ist folglich

$$= \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2}.$$

Die Glieder dieser Reihe sind die 6 ersten figurirten Zahlen der zweiten Ordnung, und ihre Summe ist folglich gleich der 6ten Zahl der dritten Ordnung, also $= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Da nun das für die Zahl 6 Erwiesene sich offenbar eben so für jede andere Zahl darthun läßt, so ist folglich, wenn m Elemente gegeben sind, die Zahl der Combinationen mit Wiederholung in der dritten Classe

$$= \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

In ganz ähnlicher Weise wird gezeigt, daß die Zahl der Formen in der 4ten Classe gleich ist

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4} \text{ u. s. w.}$$

Anm. Sollen z. B. 10 Elemente mit verstatteter Wiederholung combinirt werden, so ist

die Zahl der Formen in der 1. Klasse $= 10$

" " " " " " 2. " $= \frac{10.11}{1.2} = 55$

" " " " " " 3. " $= \frac{10.11.12}{1.2.3} = 220$

" " " " " " 4. " $= \frac{10.11.12.13}{1.2.3.4} = 715$

u. s. w. Bei verstatteter Wiederholung fallen also die Klassen viel zahlreicher aus, als bei nicht gestatteter Wiederholung; sie nehmen nicht, wie beim Combiniren ohne Wiederholung erst zu und dann wieder ab, sondern sie wachsen fortwährend, und die Zahl der Klassen ist, wie schon früher angegeben, unbegrenzt, während beim Combiniren ohne Wiederholung die Zahl der Klassen die Zahl der Formen nicht übersteigen kann.

Zur Uebung über die beiden letzten §§. können folgende Beispiele dienen:

1) Wie oft lassen sich 9 Elemente zu dreien ohne Wiederholung verbinden? — Antw. 84mal.

2) Wie oft lassen sich 8 Elemente zu fünf ohne Wiederholung verbinden? — Antw. 56mal.

3) Wie oft lassen sich 12 Elemente zu zehn ohne Wiederholung verbinden? — Antw. 66mal.

4) Wie oft lassen sich 6 Elemente zu vier mit Wiederholung verbinden? — Antw. 126mal.

5) Wie viel Verbindungslinien lassen sich a) zwischen 10, b) überhaupt zwischen n Punkten ziehen?

Antw. a) 45. b) $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

6) Wie viel Diagonalen lassen sich a) in einem Zehneck, b) in einem neck ziehen?

Antw. a) 35. b) $\frac{n(n-3)}{1.2}$.

7) Wie viel Amben und Ternen sind in den 90 Nummern des Lottospieles enthalten? — Antw. 4005 Amben und 117480 Ternen.

8) Wie viel Quaternen sind in 30 Nummern enthalten? Antw. — 27405.

9) Wie viel verschiedene Würfe sind a) mit zwei, b) mit drei, c) mit vier Würfeln möglich? — Antw. a) 21. b) 56. c) 126.

Zuweilen verlangt man auch, indem man als Elemente bestimmte Zahlen annimmt, diejenigen Combinationsformen darzustellen, deren Elemente eine bestimmte Zahl zur Summe geben. Man beschränkt sich hierbei gewöhnlich auf Combinationsformen mit Wiederholung.

Sind z. B. die Zahlen 0, 1, 2, 3... gegeben und wird die fünfte Classe der Combinationen zur Summe 6 verlangt, so sind die betreffenden Formen folgende:

00006	00123
00015	00222
00024	01113
00033	01122
00114	11112.

Soll ferner aus den Elementen 1, 2, 3, 4... die vierte Classe der Combinationen zur Summe 12 gebildet werden, so erhält man folgende Formen:

1119	1227	2226
1128	1236	2235
1137	1245	2244
1146	1335	2334
1155	1344	3333.

Man kann diese Aufgaben auch dahin aussprechen, eine Zahl auf alle mögliche Weise in eine Summe aus zwei, drei u. s. w. Summanden so zu zerfällen, daß sämmtliche Summanden positive ganze Zahlen sind.

C. Variationen.

§. 264. Erklärung.

Gegebene Elemente zu zweien, dreien u. s. w. variiren, heißt dieselben auf alle mögliche Weise und in jeder möglichen Ordnung, zu zweien, dreien u. s. w. verbinden. Man unterscheidet auch hier eben so wie beim Combiniren verschiedene Classen und Variationen mit und ohne Wiederholung.

Sind zum Variiren ohne Wiederholung die Elemente

a b c d e

gegeben, so sind die Formen der ersten Classe

a b c d e,

die Formen der zweiten Classe

ab	ba	ca	da	ea
ac	bc	cb	db	eb
ad	bd	cd	dc	ec
ae	be	ce	de	ed

die Formen der dritten Classe

abc	bac	cab	dab	eab
abd	bad	cad	dac	eac
abe	bae	cae	dae	ead
acb	bca	cba	dba	eba
acd	bcd	cbd	dbc	ebc
ace	bce	cbe	dbe	ebd
adb	bda	cda	dca	eca
adc	bdc	cdb	dcb	ecb
ade	bde	cde	dce	ecd
aeb	bea	cea	dea	eda
aec	bec	ceb	deb	edb
aed	bed	ced	dec	edc

Sind zum Variiren mit Wiederholung die Elemente

a b c

gegeben, so sind die Formen der ersten Classe

a b c

die Formen der zweiten Classe

aa	ba	ca
ab	bb	cb
ac	bc	cc

die Formen der dritten Classe

aaa	baa	caa
aab	bab	cab

aac	bac	cac
aba	bba	cba
abb	bbb	cbb
abc	bbc	cbc
aca	bca	cca
acb	bcb	ccb
acc	bcc	ccc

Von den Formen der vierten Classe beschränken wir uns darauf, die mit a anfangenden herzusetzen, da jeder Leser hiernach leicht selbst im Stande sein wird, die mit b und c anfangenden beizufügen.

aaaa	abaa	acaa
aaab	abab	acab
aaac	abac	acac
aaba	abba	acba
aabb	abbb	acbb
aabc	abbc	acbc
aaca	abca	acca
aacb	abcb	accb
aacc	abcc	accc

§. 265. Zusatz.

Wenn gegebene Elemente zu zweien, dreien u. s. w. variirt werden sollen, so besteht die erste Classe aus den gegebenen Elementen selbst. Jede folgende Classe wird aus der vorhergehenden erhalten, wenn man bei verstatteter Wiederholung jeder Form der vorhergehenden Classe jedes Element ohne Ausnahme hinzufügt, bei nicht verstatteter Wiederholung aber jede Form der vorhergehenden Classe nur mit denjenigen Elementen, welche sie noch nicht enthält, verbindet.

§. 266. Lehrsatz.

Sind m Elemente zum Variiren ohne Wiederholung gegeben, so ist die Zahl der Variationsformen

in der ersten Classe $= m$

" " zweiten " $= m(m-1)$

" " dritten " $= m(m-1)(m-2)$

" " vierten " $= m(m-1)(m-2)(m-3)$ u. s. w.

Bew. Wir wollen zunächst von einem bestimmten Falle ausgehen und annehmen, daß fünf Elemente a b c d e gegeben sind. Dann besteht die erste Classe aus diesen Elementen selbst und enthält folglich fünf Formen. Die zweite Classe aber wird nach dem vorhergehenden §. erhalten, wenn man jedes dieser fünf Elemente mit den vier übrigen verbindet, wodurch sich für die zweite Classe offenbar $5 . 4 = 20$ Formen ergeben. Die dritte Classe entsteht, wenn man jede Form der zweiten Classe mit jedem der drei übrigen Elemente, welche sie noch nicht enthält, verbindet. Da nun die zweite Classe aus $5 . 4 = 20$ Formen bestand, und aus jeder dieser Formen drei Formen für die dritte Classe gebildet werden, so ist folglich die Anzahl aller Formen in der dritten Classe $= 5 . 4 . 3$ u. s. w.

Sind überhaupt m Elemente gegeben, so enthält auch die erste Classe m Formen. Die zweite Classe entsteht, wenn man jedes dieser m Elemente mit den $m - 1$ übrigen Elementen verbindet; die Zahl dieser Formen ist folglich $m(m - 1)$. — Die dritte Classe wird erhalten, wenn man jede der $m(m - 1)$

Formen der zweiten Classe mit den m — 2 übrigen Elementen, welche sie noch nicht enthält, verbindet; folglich ist die Anzahl aller Formen in der dritten Classe m(m — 1)(m — 2). — Auf gleiche Weise findet man die Zahl der Formen in der vierten Classe = m(m — 1)(m — 2)(m — 3) u. s. w.

§. 267. Lehrsatz.

Sind m Elemente zum Variiren mit Wiederholung gegeben, so ist die Anzahl der Formen

in der ersten Classe $= m$
" " zweiten " $= m^2$
" " dritten " $= m^3$
" " vierten " $= m^4$ u. s. w.

Bew. Sind z. B. die fünf Elemente a b c d e gegeben, so bilden dieselben auch die Formen der ersten Classe und die Anzahl der Formen in der ersten Classe ist also = 5. Nach §. 265 wird die zweite Classe erhalten, wenn man jedes dieser fünf Elemente mit allen fünf Elementen verbindet; die Anzahl der Formen in der zweiten Classe ist folglich $= 5 . 5 = 25 = 5^2$. Die dritte Classe entsteht, wenn man jede der 25 Formen in der zweiten Classe mit jedem der fünf Elemente verbindet; die Zahl der Formen in der dritten Classe ist folglich $= 25 . 5 = 5^2 . 5 = 5^3 = 125$ u. s. w.

Eben so findet man, wenn m Elemente gegeben sind, die Zahl der Formen in der ersten Classe = m, in der zweiten $= m^2$, in der dritten Classe $= m^3$, in der vierten Classe $= m^4$ u. s. w.

Als Anwendungen der beiden vorhergehenden §§. können folgende Beispiele dienen:

1) Wie viel verschiedene zwei-, drei-, vier-, fünf- und sechszifferige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 schreiben, wenn jede Ziffer in der nämlichen Zahl nur einmal vorkommen darf? — Antw. 30 zweizifferige Zahlen, 120 dreizifferige, 360 vierzifferige, 720 fünfzifferige und eben so viel sechszifferige Zahlen.

2) Wie viel vierzifferige Zahlen lassen sich unter derselben Bedingung mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 schreiben? — Antw. 3024.

3) Wie viel zwei-, drei-, vier-, fünfzifferige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1 und 2 schreiben, wenn dieselbe Ziffer in einer Zahl wiederholt gesetzt werden darf? — Antw. 4 zweizifferige, 8 dreizifferige, 16 vierzifferige und 32 fünfzifferige Zahlen.

4) Wie viel zwei-, drei- und vierzifferige Zahlen lassen sich unter gleicher Bedingung mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 schreiben? — Antw. 36 zweizifferige, 216 dreizifferige und 1296 vierzifferige Zahlen.

5) Wie viel Signale, (wenn unter einem Signale ein Buchstabe, eine Ziffer oder ein ganzes Wort verstanden wird), lassen sich mit zwei verschiedenen Zeichen*) bei verstatteter Wiederholung des nämlichen Zeichens hervorbringen, wenn ein Signal a) aus nicht mehr als 5, b) aus nicht mehr als n Zeichen bestehen soll? — Antw. a) 62, b) $2^{n+1} - 2$.

6) Dieselbe Frage a) wenn 3 verschiedene, b) wenn p verschiedene Zeichen angewendet werden, und wenn ein Signal aus nicht mehr als n Zeichen bestehen soll? — Antw. a) $\frac{3^{n+1} - 3}{2}$, b) $\frac{p^{n+1} - p}{p - 1}$.

So wie gegebene Zahlen zu einer bestimmten Summe combinirt werden können, so kann auch verlangt werden, gegebene Zahlen zu einer bestimmten Summe zu variiren. — Man beschränkt sich auch hierbei gewöhnlich auf die Variationsformen mit Wiederholung, weil diese am häufigsten Anwendung finden.

*) Beim Morse'schen Telegraphen Punkt, Strich, bei dem Nadel-Telegraphen rechts, links.

Soll z. B. die dritte Classe der Variationen zur Summe 4 aus den Elementen 0, 1, 2, 3.... gebildet werden, so sind die Formen folgende:

004	040	130	301
013	103	202	310
022	112	211	400
031	121	220	

Soll ferner aus den Elementen 1, 2, 3, 4.... die vierte Classe der Variationen zur Summe 7 gebildet werden, so erhält man folgende Formen:

1114	1222	2113	2311
1123	1231	2122	3112
1132	1312	2131	3121
1141	1321	2212	3211
1213	1411	2221	4111 *).

D. Der binomische Lehrsatz.

§. 268. Lehrsatz.

Wenn aus gegebenen Elementen irgend eine Variationsclasse mit oder ohne Wiederholung dargestellt werden soll, so kann die verlangte Classe der Variationsformen auch auf die Art erhalten werden, daß man zunächst die eben so vielte Classe der Combinationen mit oder ohne Wiederholung aus den gegebenen Elementen bildet und hierauf die erhaltenen Combinationsformen permutirt.

Bew. Die Richtigkeit dieses (für das Folgende so wichtigen) Satzes geht unmittelbar aus den in §. 258 und 264 aufgestellten Definitionen hervor.

Nehmen wir an, daß m Elemente zum Variiren gegeben sind, und bezeichnen wir die Zahl der möglichen Variationsformen ohne Wiederholung in der 1ten, 2ten, 3ten, 4ten Classe mit $V_1, V_2, V_3, V_4 \ldots$ die Zahl der Combinationsformen ohne Wiederholung in den nämlichen Classen mit $C_1, C_2, C_3, C_4 \ldots$, ferner die Zahlen, welche uns angeben, wie oft sich 1, 2, 3, 4.... verschiedene Elemente permutiren lassen, mit $P_1, P_2, P_3, P_4 \ldots$, so ist nach §. 257, 262 und 266

$$V_1 = m, \qquad C_1 = m, \qquad P_1 = 1,$$

$$V_2 = m(m-1), \qquad C_2 = \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}, \qquad P_2 = 1 \,.\, 2,$$

$$V_3 = m(m-1)(m-2), \qquad C_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}, \qquad P_3 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3,$$

$$V_4 = m(m-1)(m-2)(m-3), \quad C_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}, \quad P_4 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4,$$

also $\quad V_1 = C_1\, P_1,\ V_2 = C_2\, P_2,\ V_3 = C_3\, P_3,\ V_4 = C_4\, P_4$ u. s. w.

Eine solche Beziehung findet jedoch zwischen den Variationen und Combinationen mit Wiederholung nicht statt, da die verschiedenen Combinationsformen nicht eine gleiche, sondern ganz verschiedene Zahlen von Permutationsformen liefern, je nachdem in denselben alle Elemente von einander verschieden sind, oder mehr oder weniger gleiche Elemente vorkommen.

---

*) Die mathematischen Lehrbücher pflegen diesem Capitel Beispiele aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzureihn, welche dem Pharao-, Roulette- und andern Hazardspielen entlehnt sind. Wir können jedoch hierauf nicht eingehn, da wir es nicht für eine Aufgabe der Schule halten, die Zöglinge zu umsichtigen Hazardspielern auszubilden, so wie wir überhaupt jedes in Habsucht geführte — nicht das bloß Unterhaltung bezweckende — Spiel für unmoralisch halten.

§. 269. Zusatz.

Von besonderer Wichtigkeit für das Folgende ist der Fall, daß zwei Elemente zum Variiren mit Wiederholung gegeben sind. Soll z. B. aus den Elementen a und b die 8te Classe der Variationen mit Wiederholung gebildet werden, dann sind zunächst die möglichen Combinationsformen dieser Classe folgende:

a a a a a a a a, wofür wir kürzer sagen wollen a^8
a a a a a a a b, " " " " " a^7b
a a a a a a b b, " " " " " a^6b^2
a a a a a b b b, " " " " " a^5b^3
a a a a b b b b, " " " " " a^4b^4
a a a b b b b b, " " " " " a^3b^5
a a b b b b b b, " " " " " a^2b^6
a b b b b b b b, " " " " " ab^7
b b b b b b b b, " " " " " b^8.

Fragen wir nun weiter, wie oft sich diese Combinationsformen permutiren lassen, so sind die zugehörigen Permutationszahlen nach §. 259 folgende:

Combinationsform. Zugehörige Permutationszahl.

$a^8 \ldots\ldots 1$

$$a^7b \ldots\ldots \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{8}{1}$$

$$a^6b^2 \ldots\ldots \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5.6.1.2} = \frac{8.7}{1.2}$$

$$a^5b^3 \ldots\ldots \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5.1.2.3} = \frac{8.7.6}{1.2.3}$$

$$a^4b^4 \ldots\ldots \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.1.2.3.4} = \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}$$

$$a^3b^5 \ldots\ldots \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.1.2.3.4.5} = \frac{8.7.6}{1.2.3}$$

$$a^2b^6 \ldots\ldots \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.1.2.3.4.5.6} = \frac{8.7}{1.2}$$

$$ab^7 \ldots\ldots \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{8}{1}$$

$a^8 \ldots\ldots 1.$

Eben so erhalten wir für die Formen der mten Classe und die zugehörigen Permutationszahlen, indem wir für diese in der dritten Colonne noch ein besonderes Zeichen hinzufügen, dessen wir uns in Folgendem der Kürze wegen häufig bedienen werden, folgende Zusammenstellung:

Combinationsform. Zugehörige Permutationszahl.

$a^m \ldots\ldots\ldots\ldots 1$

$a^{m-1}\,b \ldots\ldots\ldots\ldots m \qquad = m_1$

$$a^{m-2}\,b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m(m-1)}{1.2} \qquad = m_2$$

$$a^{m-3}\,b^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \qquad = m_3$$

$$a^{m-4}\,b^4 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} = m_4$$

. . . .

. . . .

$a\,b^{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots m \qquad = m_1$

$b^m \ldots\ldots\ldots\ldots 1.$

§. 270. Lehrsatz.

Die Glieder der entwickelten mten Potenz des Binomiums $a + b$ werden erhalten, wenn man die mte Classe der Combinationen mit Wiederholung aus den Elementen a und b bildet, die entstandenen Combinationsformen als Producte ansieht und jede Form mit der zugehörigen Permutationszahl multiplicirt.

Bew. Die zweite Potenz von $a + b$ entsteht, wenn man $a + b$ mit $a + b$, also jedes Glied a und b des einen Factors mit jedem Gliede a und b des andern Factors multiplicirt, wie die folgende ausführliche Rechnung zeigt.

$$\begin{array}{c} a + b \\ a + b \\ \hline aa + ab + ba + bb. \end{array}$$

Auf gleiche Weise wird die zweite Classe der Variationen mit Wiederholung aus den Elementen a und b erhalten, wenn man jedes Element a und b mit jedem Elemente a und b verbindet. Man erhält so

aa ab ba bb.

Die zweite Potenz von $a + b$ stimmt also genau mit der zweiten Classe der Variationen mit Wiederholung aus den Elementen a und b überein.

Aus der zweiten Potenz von $a + b$ erhalten wir die dritte, wenn wir jedes Glied der zweiten Potenz mit a und b multipliciren. Auf gleiche Weise erhalten wir überhaupt aus jeder vorhergehenden Potenz die folgende, indem wir jedes Glied der vorhergehenden mit a und b multipliciren.

Aus der zweiten Classe der Variationen mit Wiederholung aus den Elementen a und b entsteht die dritte, wenn wir jede Form der zweiten Classe mit a und b verbinden. Auf dieselbe Weise wird aus der dritten Classe die vierte, aus der vierten die fünfte und überhaupt aus jeder vorhergehenden Classe die folgende abgeleitet.

Da wir nun schon gesehen haben, daß die zweite Classe der Variationen mit Wiederholung aus den Elementen a und b mit der zweiten Potenz des Binomiums $a + b$ identisch ist, und da jede folgende Potenz aus der vorhergehenden ganz auf dieselbe Weise wie jede folgende Variationsclasse aus der vorhergehenden abgeleitet wird, so muß auch die dritte, vierte, fünfte und überhaupt die mte Potenz von $a+b$ mit der dritten, vierten, fünften und überhaupt mit der mten Classe der Variationen mit Wiederholung aus den Elementen a und b übereinstimmen.

Nach §. 268 kann aber das Variiren auch auf die Art geschehen, daß man erst combinirt und dann permutirt. Wir werden daher die mte Potenz des Binomiums $a + b$ auch so erhalten können, daß wir zunächst die mte Classe der Combinationen mit Wiederholung aus den Elementen a und b bilden und die entstandenen Formen dann permutiren. Da diese Formen als Producte angesehen werden sollen und in einem Producte die Stellung der Factoren gleichgiltig ist, so können wir auch, statt wirklich zu permutiren, jede der entstandenen Combinationsformen mit der zugehörigen Permutationszahl multipliciren. Demnach wird die mte Potenz von $a + b$ erhalten, wenn man die mte Classe der Combinationen mit Wiederholung aus den Elementen a und b bildet und jede der entstandenen Formen mit der zugehörigen Permutationszahl multiplicirt.

§. 271. Zusatz.

Bezeichnet m eine beliebige positive ganze Zahl, so ist

$$(a + b)^m = a^m + m_1 a^{m-1} b + m_2 a^{m-2} b^2 + m_3 a^{m-3} b^3 \ldots. + m_1 a b^{m-1} + b^m.$$

Bew. Zufolge des vorherg. §. werden die Glieder der mten Potenz des Binomiums a + b erhalten, wenn wir die mte Classe der Combinationen mit Wiederholung aus den Elementen a und b bilden, die entstandenen Formen als Producte ansehen und jede mit der zugehörigen Permutationszahl multipliciren. Nach §. 269 sind aber diese Combinationsformen als Producte geschrieben, folgende

$$a^m \quad a^{m-1}b \quad a^{m-2}b^2 \quad a^{m-3}b^3 \ldots \quad ab^{m-1} \quad b^m$$

und die zu denselben gehörigen Permutationszahlen

$$1 \quad m_1 \quad m_2 \quad m_3 \ldots \quad m_1 \quad 1,$$

wornach die Richtigkeit des obigen Satzes in die Augen fällt.

Hiernach ist z. B. $(a + b)^8$

$$= \begin{cases} a^8 + 8a^7b + \frac{8\,.\,7}{1\,.\,2}a^6b^2 + \frac{8\,.\,7\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3}a^5b^3 + \frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^4b^4 \\ + \frac{8\,.\,7\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3}a^3b^5 + \frac{8\,.\,7}{1\,.\,2}a^2b^6 + 8ab^7 + b^8 \end{cases}$$

$$= a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8.$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

2) $(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

3) $(a + b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$

4) $(a + b)^{13} = a^{13} + 13a^{12}b + 78a^{11}b^2 + 286a^{10}b^3 + 715a^9b^4 + 1287a^8b^5 + 1716a^7b^6 + 1716a^6b^7 + 1287a^5b^8 + 715a^4b^9 + 286a^3b^{10} + 78a^2b^{11} + 13ab^{12} + b^{13}$

5) $(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

6) $(a - b)^9 = a^9 - 9a^8b + 36a^7b^2 - 84a^6b^3 + 126a^5b^4 - 126a^4b^5 + 84a^3b^6 - 36a^2b^7 + 9ab^8 - b^9$

7) $(2a + 3b)^4 = 16a^4 + 96a^3b + 216a^2b^2 + 216ab^3 + 81b^4$

8) $\left(4 - \frac{1}{2}x\right)^5 = 1024 - 640x + 160x^2 - 20x^3 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{x^5}{32}.$

Bei der Berechnung der Binomialcoefficienten kann folgende Bemerkung Nutzen gewähren. Wie leicht zu sehen, ist

$$m_2 = m_1 \,.\, \frac{m-1}{2}, \quad m_3 = m_2 \,.\, \frac{m-2}{3}, \quad m_4 = m_3 \,.\, \frac{m-3}{4}$$

u. s. w. Soll z. B. die 12te Potenz von a + b berechnet werden, so sind die Coefficienten vom zweiten an folgende:

$$12_1 = 12 \qquad 12_2 = 12\,.\,\frac{11}{2} = 66$$

$$12_3 = 66\,.\,\frac{10}{3} = 220 \qquad 12_4 = 220\,.\,\frac{9}{4} = 495$$

$$12_5 = 495\,.\,\frac{8}{5} = 792 \qquad 12_6 = 792\,.\,\frac{7}{6} = 924.$$

Die folgenden Coefficienten kehren wieder.

*§. 272. Lehrsatz.

Die mte Potenz eines Polynomiums a + b + c + d... wird erhalten, wenn man die mte Classe der Combinationen mit Wiederholung aus den Elementen a, b, c, d... bildet, die entstandenen Formen als Producte behandelt und jede mit der zugehörigen Permutationszahl multiplicirt.

Der Beweis dieses Satzes, welcher der polynomische Lehrsatz genannt wird, ist im wesentlichen derselbe wie der des binomischen §. 270.

So ist z. B.

1) $(a + b + c)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4$.

2) $(a + b + c + d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3ab^2 + 6abc + 6abd + 3ac^2 + 6acd + 3ad^2 + b^3 + 3b^2c + 3b^2d + 3bc^2 + 6bcd + 3bd^2 + c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$.

Neunter Abschnitt.

Von den Eigenschaften ganzer Zahlen.

A. Von den Theilern und Vielfachen.

§. 273. Erklärung.

Eine ganze Zahl a heißt ein **Theiler** einer andern ganzen Zahl b und die Zahl b wird ein **Vielfaches** von a genannt, wenn es irgend eine dritte ganze Zahl gibt, welche mit a multiplicirt b zum Producte gibt. (So ist z. B. 8 ein Theiler von 24 und 24 ein Vielfaches von 8, weil $8 . 3 = 24$ ist).

In diesem Abschnitte wird überhaupt nur von **ganzen** Zahlen die Rede sein, auch wenn dieses nicht besonders erwähnt wird.

§. 274. Zusatz.

1) **Wenn eine Zahl a durch eine andere b theilbar ist, so ist auch jedes Vielfache von a,** also, wenn m irgend eine ganze Zahl bezeichnet, **ma durch b theilbar.** — Denn nach §. 49 ist $\frac{ma}{b} = m . \frac{a}{b}$, und da $\frac{a}{b}$ nach der Voraussetzung eine ganze Zahl ist, so ist offenbar auch das Product $m . \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl.

2) **Wenn zwei Zahlen a und b durch eine dritte c theilbar sind, so ist auch ihre Summe a + b und ihre Differenz a — b durch c theilbar.** — Denn da nach der Voraussetzung a und b Vielfache von c sein sollen, so werden wir $a = mc$ und $b = nc$ setzen können, wo m und n irgend ganze Zahlen bedeuten. Dann ist

$$a + b = mc + nc = (m + n)c \text{ und } a - b = mc - nc = (m - n)c.$$

Da nun $m + n$ und $m - n$ offenbar wieder ganze Zahlen sind, so ist folglich c sowohl ein Theiler der Summe $a + b$, als auch der Differenz $a - b$.

Die Zahlen 21 und 36 sind beide durch 3 theilbar; es muß daher auch 3 ein Theiler der Summe 57 und der Differenz 15 sein.

§. 275. Zusatz.

Wenn eine Zahl durch eine andere dividirt einen Rest läßt, so ist jeder gemeinschaftliche Theiler des Dividendus und Divisors auch ein Theiler des Restes und jeder gemeinschaftliche Theiler des Divisors und Restes auch ein Theiler des Dividendus.

Bew. Die Zahl a gebe durch b dividirt zum Quotienten q und zum Reste r, dann ist $a = bq + r$ und $a - bq = r$.

Ist nun c ein gemeinschaftlicher Theiler des Dividendus a und des Divisors b, so ist nach dem vorhergehenden §. c auch ein Theiler der Differenz $a - bq$, also ein Theiler des Restes r; und ist c als ein Theiler des Divisors b und des Restes r gegeben, so muß c nach demselben §. auch ein Theiler der Summe $bq + r$, d. h. des Dividendus a sein.

Wenn man 64 durch 28 dividirt, so erhält man zum Quotienten 2 und zum Reste 8. Da nun 64 und 28 den gemeinschaftlichen Theiler 4 haben, so muß 4 auch ein Theiler des Restes 8 sein. — Wenn man ferner 57 durch 12 dividirt, so erhält man zum Quotienten 4 und zum Reste 9; da nun der Divisor 12 und der Rest 9 den gemeinschaftlichen Theiler 3 haben, so muß 3 auch in dem Dividendus 57 aufgehen; und in der That ist $57 = 19 . 3$.

§. 276. Erklärung.

Eine ganze Zahl, welche außer sich selbst und der Einheit keinen Theiler hat, wird eine *einfache Zahl* oder *Primzahl* genannt; alle anderen Zahlen heißen *zusammengesetzte*.

Die zwischen 1 und 100 enthaltenen Primzahlen sind folgende: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Alle anderen zwischen 1 und 100 liegenden Zahlen, welche hier nicht aufgeführt sind, sind zusammengesetzte Zahlen.

§. 277. Lehrsatz.

Wenn zwei Zahlen durch eine Primzahl nicht theilbar sind, so ist auch ihr Product durch die Primzahl nicht theilbar.

Bew. 1) Wir wollen, um größerer Anschaulichkeit willen, die Richtigkeit des Satzes zunächst an einem bestimmten Beispiele darthun. — Die beiden Zahlen 15 und 27 sind durch die Primzahl 11 nicht theilbar; es läßt sich zeigen, daß auch das Product $15 . 27 = 405$ durch die Primzahl 11 nicht theilbar sein kann. Um dieses darzuthun, dividiren wir zunächst mit der Primzahl 11 in die eine gegebene Zahl 15 und erhalten so zum Quotienten 1 und zum Reste 4; demnach ist

$$1)\quad 15 - 1 . 11 = 4.$$

Hierauf dividiren wir mit dem Reste 4 in die Primzahl 11 und erhalten zum Quotienten 2 und zum Reste 3; folglich ist

$$2)\quad 11 - 2 . 4 = 3.$$

Hierauf dividiren wir mit dem so eben erhaltenen Reste 3 in die Primzahl 11 und erhalten zum Quotienten 3 und zum Reste 2; also

$$3)\quad 11 - 3 . 3 = 2.$$

Weiter dividiren wir mit dem Reste 2 der zuletzt ausgeführten Division in die Primzahl 11 und erhalten zum Quotienten 5 und zum Reste 1; also

$$4)\quad 11 - 5 . 2 = 1.$$

Wir brechen nun, nachdem wir den Rest 1 erhalten haben, die Rechnung ab, da 1 in 11 aufgeht, und multipliciren die Gleichungen (1) bis (4) mit der andern gegebenen Zahl 27, wodurch wir folgende Gleichungen erhalten:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 15 . 27 - 1 . 11 . 27 = 4 . 27 \\ \text{II.} & 11 . 27 - 2 . \ 4 . 27 = 3 . 27 \\ \text{III.} & 11 . 27 - 3 . \ 3 . 27 = 2 . 27 \\ \text{IV.} & 11 . 27 - 5 . \ 2 . 27 = 1 . 27. \end{array}$$

Wenn nun das Product 15 . 27 durch die Primzahl 11 theilbar wäre, so wäre in der Gleichung I. sowohl der Minuend 15 . 27 als auch der Sub-

trahend 1 . 11 . 27 durch 11 theilbar, und es müßte folglich auch die Differenz 4 . 27 durch 11 theilbar sein; dann müßte aber aus gleichen Gründen vermöge Gleichung II. auch 3 . 27 durch 11 theilbar, folglich vermöge Gleichung III. auch 2 . 27 und endlich vermöge Gleichung IV. auch 1 . 27 = 27 durch 11 theilbar sein. Dieses widerspricht aber der Voraussetzung, und es kann folglich auch das Product 15 . 27 nicht durch 11 theilbar sein, w. z. b. w.

*Bew. 2) Um den Beweis ganz allgemein zu führen, bezeichnen wir die gegebene Primzahl mit p und durch a und b irgend zwei Zahlen, welche beide durch p nicht theilbar sind. Um nun zu zeigen, daß auch das Product ab nicht durch p theilbar sein kann, dividiren wir mit p in die eine Zahl a, dann mit dem Reste dieser Division in die Primzahl p, hierauf mit dem Reste dieser Division abermals in p und so fort mit dem Reste der zuletzt ausgeführten Division immer wieder in p, bis wir endlich zu dem Reste 1 gelangen, was nothwendig einmal eintreten muß. Denn da der Rest allemal kleiner ist, als der Divisor, so müssen bei dem angezeigten Verfahren die Divisoren und folglich auch die Reste immer kleiner werden; und die Rechnung kann auch, da p eine Primzahl ist, nicht aufgehen, so lange als Rest der vorhergehenden Division eine andere Zahl als 1 erhalten worden ist. Bezeichnen wir nun die Quotienten der auf einander folgenden Divisionen mit q, q_1, q_2 . . . und die zugehörigen Reste mit r, r_1, r_2 . . ., nehmen wir ferner an, daß nach n Divisionen in p der Rest 1 erhalten wird, und bezeichnen den letzten Quotienten mit q_n, so können wir folgende Gleichungen aufstellen:

$$a - pq = r \text{*)}$$
$$p - rq_1 = r_1$$
$$p - r_1q_2 = r_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p - r_{n-1}q_n = 1.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen sämmtlich mit b, so erhalten wir weiter

$$ab - pqb = rb$$
$$pb - rq_1b = r_1b$$
$$pb - r_1q_2b = r_2b$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$pb - r_{n-1}q_n b = 1 . b.$$

Wenn nun das Product ab durch die Primzahl p theilbar wäre, so müßte zufolge der ersten der vorstehenden Gleichungen auch die Differenz $ab - pqb = rb$ durch p theilbar sein; dann müßte aber auch vermöge der folgenden Gleichungen r_1b, r_2b . . . und endlich auch 1 . b = b durch p theilbar sein, was der Voraussetzung widerstreitet. Demnach kann auch das Product a . b nicht durch p theilbar sein.

§. 278. Zusatz.

1) **Wenn ein Product a . b durch eine Primzahl p theilbar ist, so muß wenigstens einer der beiden Factoren a oder b durch p theilbar sein.** — Denn wenn a und b beide durch p nicht theilbar wären, so könnte auch ihr Product a . b nach dem vorhergehenden §. durch p nicht theilbar sein.

---

*) Wenn $a < p$ ist, so ist $q = o$, und $r = a$.

(So ist z. B. das Product 2 . 65 = 130 durch die Primzahl 13 theilbar; es muß daher wenigstens einer der beiden gegebenen Factoren 65 durch 13 theilbar sein).

2) Wenn mehrere Zahlen a, b, c, d . . . durch eine Primzahl p nicht theilbar sind, so kann auch ihr Product a . b . c . d . . . durch p nicht theilbar sein. — Denn nach dem vorhergehenden §. ist zunächst das Product a . b durch p nicht theilbar; folglich kann nach demselben §. auch das Product a . b . c und daher auch das Product a . b . c . d u. s. w. durch p nicht theilbar sein.

(So sind z. B. die Zahlen 10, 12 und 16 durch die Primzahl 7 nicht theilbar; es kann daher auch das Product

$$10 . 12 . 16 = 1920$$

durch 7 nicht theilbar sein).

3) Das Product mehrerer Primzahlen kann vermöge (2) durch keine von denselben verschiedene Primzahl theilbar sein.

(So kann z. B. das Product 5 . 11 . 13 = 715 durch 3 nicht theilbar sein).

§. 279. Erklärung.

Eine zusammengesetzte Zahl in einfache Factoren zerlegen, heißt dieselbe als ein Product aus Primzahlen darstellen.

So ist z. B. 4 = 2 . 2, 6 = 2 . 3, 8 = 2 . 2 . 2, 9 = 3 . 3, 10 = 2 . 5, 12 = 2 . 2 . 3 u. dgl. m.

§. 280. Aufgabe.

Eine zusammengesetzte Zahl in einfache Factoren zu zerlegen.

Aufl. Man dividire die gegebene Zahl durch die kleinste Primzahl 2, den Quotienten abermals durch 2 und setze dieses so lange fort, als die Division aufgeht. Dann dividire man den letzten Quotienten durch die nächstfolgende Primzahl 3 wieder so lange, als die Division aufgeht; eben so verfahre man mit der nächstfolgenden Primzahl 5 u. s. f. Die sämmtlichen Divisoren und der letzte nicht mehr zerlegbare Quotient sind die einfachen Factoren der gegebenen Zahl.

Soll z. B. die Zahl 122760 in einfache Factoren zerlegt werden, so ist die Rechnung folgende

2)	122760
2)	61380
2)	30690
3)	15345
3)	5115
5)	1705
11)	341
	31.

Hiernach ist 122760 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 11 . 31.

§. 281. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden §. ist zugleich klar, wie man zu verfahren hat, um zu untersuchen, ob eine Zahl eine einfache oder zusammengesetzte ist. — Auch kann man sich die Rechnung durch die folgende leicht einzusehende Behauptung abkürzen: Läßt eine Zahl bei der Division durch die auf einander folgenden Primzahlen fortwährend Reste, so kann man die Rechnung abbrechen, sobald ein Quotient kleiner wird, als der zugehörige Divisor, indem die gegebene Zahl dann gewiß eine einfache ist. Will man z. B. untersuchen,

ob 367 eine einfache oder zusammengesetzte Zahl ist, so braucht man mit der Division durch die auf einander folgenden Primzahlen 2, 3, 5, 7 u. s. f. nur bis 23 fortzuschreiten, da man hier zum Quotienten 15 erhält, welches < 23 ist. Denn gesetzt es gäbe eine größere Zahl als 23, z. B. α, welche in 367 aufginge, so müßte der zugehörige Quotient β kleiner sein als 23 und offenbar ebenfalls in 367 aufgehen, was doch nicht möglich ist, da man bereits gesehen hat, daß keine Zahl, die < 23 ist, in 367 aufgeht.

§. 282. Lehrsatz.

Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich nur auf eine einzige Art in einfache Factoren zerlegen.

Bew. Um größerer Anschaulichkeit willen wollen wir die Richtigkeit des Satzes an einem bestimmten Beispiele darthun. — Wenn wir die Zahl 360 nach dem Verfahren des §. 280 in einfache Factoren zerlegen, so erhalten wir

$$360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5.$$

Nun ist es erstens nicht möglich, die Zahl 360 durch ein anderes Verfahren so zu zerlegen, daß einer der einfachen Factoren derselben öfter, z. B. der Factor 2 nicht dreimal, sondern viermal vorkäme. Denn wenn dies geschehen könnte, so müßte $2 . 2 . 2 . 2$ in $360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5$, also 2 in $3 . 3 . 5$ aufgehen. Nach §. 278 kann aber das Product mehrerer Primzahlen durch keine von denselben verschiedene Primzahl theilbar sein.

Zweitens ist es auch nicht möglich, die Zahl $360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5$ durch ein anderes Verfahren so zu zerlegen, daß unter den einfachen Factoren derselben eine von 2, 3 und 5 verschiedene Primzahl, z. B. 7 vorkäme; denn nach §. 278 kann das Product $2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5$ durch keine von 2, 3 und 5 verschiedene Primzahl theilbar sein.

§. 283. Zusatz.

1) Eine zusammengesetzte Zahl a ist durch eine Zahl b nur dann theilbar, wenn die einfachen Factoren der Zahl b sich sämmtlich auch unter den Factoren von a finden, und wenn jeder dieser Factoren in a wenigstens eben so oft als in b vorkommt.

Der Beweis dieses Satzes beruht eben so wie der des vorhergehenden Lehrsatzes auf §. 278, zufolge dessen ein Product mehrerer Primzahlen durch keine von denselben verschiedene Primzahl theilbar sein kann.

2) Wenn man eine Zahl in einfache Factoren zerlegt hat, so lassen sich auch leicht alle Zahlen angeben, welche in derselben aufgehen. Diese sind zunächst die einfachen Factoren selbst, und man findet die übrigen, wenn man die einfachen Factoren zu zweien, dreien u. s. w. combinirt. — So ist z. B. die Zahl

$$360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5$$

durch folgende Zahlen theilbar:

1) 2	12) $2 . 3 . 3 = 18$
2) 3	13) $2 . 3 . 5 = 30$
3) 5	14) $3 . 3 . 5 = 45$
4) $2 . 2 = 4$	15) $2 . 2 . 2 . 3 = 24$
5) $2 . 3 = 6$	16) $2 . 2 . 2 . 5 = 40$
6) $2 . 5 = 10$	17) $2 . 2 . 3 . 5 = 60$
7) $3 . 3 = 9$	18) $2 . 3 . 3 . 5 = 90$
8) $3 . 5 = 15$	19) $2 . 2 . 2 . 3 . 3 = 72$
9) $2 . 2 . 2 = 8$	20) $2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 120$
10) $2 . 2 . 3 = 12$	21) $2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 180.$
11) $2 . 2 . 5 = 20$	

§. 284. Erklärung.

Zwei Zahlen, welche außer der Einheit keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, werden relative Primzahlen genannt. Die eigentlichen Primzahlen nennt man zum Unterschiede hiervon absolute Primzahlen.

Relative Primzahlen sind z. B. 8 und 15, ferner 12 und 25, 10 und 21 u. dgl. m.

§. 285. Zusatz.

Ueber relative Primzahlen stellen wir folgende Sätze auf:

1) Alle absoluten Primzahlen sind, wie sogleich einleuchtet, auch relative Primzahlen.

2) Wenn eine Zahl a gegen zwei andere b und c eine relative Primzahl ist, so ist sie auch gegen das Product derselben b . c eine relative Primzahl. — Denn wenn wir die Zahlen a, b und c in ihre einfachen Factoren zerlegen und a weder mit b noch mit c einen gemeinschaftlichen Factor hat, so kann a offenbar auch mit dem Producte b . c keinen Factor gemeinschaftlich haben.

(So ist z. B. 100 eine relative Primzahl gegen 7 und 9 und folglich auch gegen das Product 7 . 9 = 63).

3) Wenn eine Zahl a durch zwei relative Primzahlen b und c theilbar ist, so ist sie auch durch das Product derselben b . c theilbar. — Denn da nach der Voraussetzung sämmtliche einfache Factoren von b und eben so sämmtliche Factoren von c in a vollständig enthalten sind und b und c keinen Factor gemeinschaftlich haben, so müssen offenbar sämmtliche Factoren des Productes b . c in a vollständig enthalten, also auch a durch b . c theilbar sein.

(So ist z. B. die Zahl 108 durch die relativen Primzahlen 4 und 9 theilbar; dieselbe muß daher auch durch das Product 4 . 9 = 36 theilbar sein).

4) Wenn ein Product a . b durch eine dritte Zahl c theilbar und einer der Factoren a gegen die dritte Zahl c eine relative Primzahl ist, so muß der andere Factor b durch die dritte Zahl c theilbar sein. — Denn da nach der Voraussetzung die einfachen Factoren von c sich vollständig unter den einfachen Factoren des Productes a . b vorfinden, keiner der Factoren von c aber sich unter den Factoren von a finden soll, so muß b allein sämmtliche Factoren von c enthalten, also b durch c theilbar sein.

(So ist z. B. das Product 5 . 108 = 540 durch die Zahl 27 theilbar; da nun der eine Factor 5 und die Zahl 27 relative Primzahlen sind, so muß folglich der andere Factor 108 durch 27 theilbar sein).

§. 286. Zusatz.

Ein Bruch $\frac{a}{b}$, dessen Zähler a und Nenner b relative Primzahlen sind, kann wohl in größeren, aber nicht in kleineren Zahlen ausgedrückt werden. — Denn wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist, so ist $c = \frac{a \cdot d}{b}$. Demnach ist das Produkt a . d durch b theilbar, und da b nach der Voraussetzung eine relative Primzahl gegen a ist, so muß folglich d durch b theilbar, also d = oder > b und folglich auch c = oder > a sein.

§. 287. Zusatz.

1) Wenn $\frac{a}{b}$ ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch ist, also a und b relative Primzahlen sind, so ist auch die ganze

Potenz $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch. — Denn wenn a und b keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so können offenbar auch die Potenzen $a^m = a.a.a\ldots$ und $b^m = b.b.b\ldots$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

2) Da hiernach die Potenz eines in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruches niemals einer ganzen Zahl gleich sein kann, so folgt hieraus, daß die Wurzel aus einer ganzen Zahl, wenn dieselbe nicht selbst wieder einer ganzen Zahl gleich ist, nothwendig irrational ist, indem es vermöge (1) keine gebrochene Zahl geben kann, welche mit dem Wurzelexponenten potenzirt zur Potenz eine ganze Zahl gibt.

3) Die Wurzel aus einem in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruche ist nur dann rational, wenn die Wurzel aus Zähler und Nenner rational ist. — Denn ist $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{a}{b}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$ in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, also a gegen b und α gegen β eine relative Primzahl, so ist nach (1) auch $\frac{\alpha^m}{\beta^m}$ ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch, und da ferner $\frac{\alpha^m}{\beta^m} = \frac{a}{b}$ vorausgesetzt ist, so muß $\alpha^m = a$ und $b = \beta^m$, also sowohl $\sqrt[m]{a}$ als auch $\sqrt[m]{b}$ rational sein.

§. 288. Erklärung.

Die größte Zahl, welche in zwei gegebenen Zahlen aufgeht, wird der größte gemeinschaftliche Theiler derselben, und die kleinste Zahl, in welcher zwei gegebene Zahlen aufgehen, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache derselben genannt.

So ist z. B. 8 der größte gemeinschaftliche Theiler der Zahlen 24 und 40 und 120 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Zahlen.

§. 289. Aufgabe.

Den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden.

Aufl. Man dividire mit der kleineren Zahl in die größere; geht die Division auf, so ist offenbar die kleinere Zahl selbst der größte gemeinschaftliche Theiler; bleibt aber ein Rest, so dividire man mit diesem in den vorhergehenden Divisor und wiederhole diese Operation so oft, bis man endlich zu einem Divisor gelangt, der in dem zugehörigen Dividendus aufgeht. Dieser Divisor ist der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden gegebenen Zahlen. — Wird z. B. der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen 1344 und 1701 gesucht, so ist die Rechnung folgende:

1344	1701	1				
	1344					
	357	1344	3			
		1071				
		273	357	1		
			273			
			84	273	3	
				252		
				21	84	4
					84	

Demnach ist 21 der größte gemeinschaftliche Theiler von 1344 und 1701.

Beweis. Daß zunächst die Rechnung nicht ohne Ende fortgehen kann, sondern einmal abbrechen muß, folgt daraus, daß jeder Rest wenigstens um eine Einheit kleiner ist, als der zugehörige Divisor. Man muß daher nach mehrmaliger Wiederholung der Operation des Dividirens, wenn nicht schon früher ein Divisor in seinem Dividendus aufging, endlich doch jedenfalls zu dem Reste 1 gelangen, der natürlich in dem zugehörigen Dividendus aufgeht. In diesem Falle würde, wie man gleich weiter sehen wird, die Einheit der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden gegebenen Zahlen sein, und diese wären folglich relative Primzahlen.

Daß in dem vorliegenden Falle 21 wirklich ein gemeinschaftlicher Theiler von 1344 und 1701 ist, folgt leicht aus §. 275. Denn da 21 in sich selbst und in 84, also im Rest und im Divisor der vorletzten Division aufgeht, so muß 21 auch ein Theiler des zugehörigen Dividendus 273 sein. Da hiernach 21 in dem Rest 84 und in dem Divisor 273 der drittletzten Division aufgeht, so ist es auch ein Theiler des Dividendus 357. Eben so findet man weiter, daß 21 ein Theiler von 1344 und 1701 ist.

Endlich ist noch zu zeigen, daß 21 auch der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen 1344 und 1701 ist. Angenommen, es gäbe einen größeren gemeinschaftlichen Theiler α, so müßte nach §. 275 die Zahl α auch in dem Reste der ersten Division 357 aufgehen, da sie ein Theiler des Divisors 1344 und des Dividendus 1701 sein soll. Aus denselben Gründen müßte α auch ein Theiler der folgenden Reste 273, 84 und 21 sein. Es kann aber offenbar keine größere Zahl α ein Theiler einer kleineren 21 sein; demnach ist nicht α, sondern 21 der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen 1344 und 1701.

Aus dem Gange des vorstehenden Beweises wird man auch noch leicht folgende Behauptung als richtig erkennen: Wenn man in der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen nach dem angegebenen Verfahren auf einen Rest stößt, der eine absolute Primzahl ist und in dem folgenden Dividendus nicht aufgeht, so sind die gegebenen Zahlen relative Primzahlen, und man hat daher nicht nöthig, die Rechnung weiter fortzusetzen. Sind z. B. 809 und 2314 gegeben, so ist die vollständige Rechnung:

809	2314	2							
	1618								
	696	809	1						
		696							
		113	696	6					
			678						
			18	113	6				
				108					
				5	18	3			
					15				
					3	5	1		
						3			
						2	3	1	
							2		
							1	2	2
								2	

Man hätte aber diese Rechnung bei dem Reste 113 abbrechen können, da man diesen leicht als absolute Primzahl erkennt.

§. 290. Aufgabe.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu finden.

Aufl. Man zerlege die gegebenen Zahlen in ihre einfachen Factoren und bilde aus diesen ein Product, welches jeden der Factoren so oft als die Zahl enthält, in welcher er sich am häufigsten findet. Dieses Product ist das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Es seien z. B. die Zahlen

12, 16, 20, 24, 27, 50 und 54

gegeben; dann ist

12 = 2 . 2 . 3   27 = 3 . 3 . 3
16 = 2 . 2 . 2 . 2   50 = 2 . 5 . 5
20 = 2 . 2 . 5   54 = 2 . 3 . 3 . 3.
24 = 2 . 2 . 2 . 3

Nun findet sich die Primzahl
2 am häufigsten in 16, nämlich viermal,
3 am häufigsten in 27 und 54, nämlich dreimal,
5 am häufigsten in 50, nämlich zweimal.

Demnach ist die gesuchte Zahl

2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5 . 5 = 10800.

Daß in dieser Zahl die gegebenen sämmtlich aufgehen, ist an sich klar; eben so ist leicht zu sehen, daß sie die möglich kleinste ist; denn wollte man irgend eine kleinere Zahl, welche z. B. den Factor 2 nur dreimal enthielte, also 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5 . 5 = 5400 annehmen, so würde die Zahl 16, in welcher 2 am häufigsten steht, nicht in 5400 aufgehen können.

Bekanntlich wird diese Aufgabe bei der Addition der Brüche benutzt, um den kleinsten Generalnenner zu finden. — Uebrigens sieht man noch leicht, daß solche Zahlen, welche in anderen aufgehen, aus der Rechnung ganz wegbleiben können, so in dem obigen Beispiel 12 und 27, da sie beziehlich in 24 und 54 aufgehen. Ferner kann man die Zahlen weglassen, welche sich in ein Product aus relativen Primzahlen zerlegen lassen, die in anderen der gegebenen Zahlen aufgehen, so z. B. 24 = 3 . 8, da 3 in 54 und 8 in 16 aufgeht, und 20 = 4 . 5, da 4 in 16 und 5 in 50 aufgeht, wonach von den obigen Zahlen überhaupt nur noch 16, 50 und 54 zu berücksichtigen bleiben.

§. 291. Zusatz.

In ganz ähnlicher Art kann man den größten gemeinschaftlichen Theiler mehrerer Zahlen erhalten, wenn man diejenigen Factoren, welche sich in allen Zahlen finden, zu einem Produkt verbindet und zwar jeden Factor so vielmal hinschreibt, als ihn die Zahl enthält, in welcher er sich am wenigsten oft findet. — So haben die Zahlen des vorhergehenden Beispiels außer der Einheit gar keinen gemeinschaftlichen Theiler; dagegen haben die Zahlen

24 = 2 . 2 . 2 . 3   72 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3
36 = 2 . 2 . 3 . 3   84 = 2 . 2 . 3 . 7
60 = 2 . 2 . 3 . 5   108 = 2 . 2 . 3 . 3 . 3

den größten gemeinschaftlichen Theiler

2 . 2 . 3 = 12.

§. 292. Zusatz.

Ueber den größten gemeinschaftlichen Theiler und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen stellen wir noch folgende Sätze auf, deren Beweise so leicht zu führen sind, daß wir dieselben der Kürze wegen übergehen.

1) Jeder gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen ist entweder der größte oder ein Theiler des größten gemeinschaftlichen Theilers, und

2) jedes gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen ist entweder das kleinste oder ein Vielfaches des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

3) Wenn man zwei Zahlen durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt, so sind die Quotienten relative Primzahlen, und ein gemeinschaftlicher Theiler zweier Zahlen ist der größte, wenn die beiden Zahlen durch den gemeinschaftlichen Theiler dividirt zu Quotienten relative Primzahlen geben.

4) Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen gibt durch dieselben dividirt zu Quotienten relative Primzahlen, und ein gemeinschaftliches Vielfache zweier Zahlen ist das kleinste, wenn diese Bedingung erfüllt ist.

Anhang.

Anwendungen der vorhergehenden allgemeinen Sätze auf das decadische Zahlensystem.

Lehrsatz. 1) Eine Zahl ist durch 2 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine Null oder durch 2 theilbar ist; eine Zahl ist durch 4, 8, 16 u. s. f. theilbar, wenn sie am Ende 2, 3, 4 ꝛc. Nullen hat, oder wenn die Zahl, welche die 2, 3, 4 u. s. f. letzten Ziffern bilden, durch 4, 8, 16 ꝛc. theilbar ist.

2) Eine Zahl ist durch 5 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist.

3) Eine Zahl ist durch 3 oder 9 theilbar, wenn 3 oder 9 in der Summe der Ziffer aufgeht.

Beweis. 1) Die Zahl 310 ist durch 2 theilbar, da $310 = 31 . 10$ und 10 durch 2 theilbar ist. — Ferner ist 456 durch 2 theilbar, da 2 in der letzten Ziffer 6 aufgeht. Denn es ist $456 = 450 + 6$, und da die Zahl 2 ein Theiler der beiden Summanden 450 und 6 ist, so geht sie auch nach §. 274 in der Summe 456 auf.

Die Zahl 5700 ist durch 4 theilbar; denn es ist $5700 = 57 . 100$ und $100 = 10 . 10$ durch $4 = 2 . 2$ theilbar, weil 2 ein Theiler von 10 ist. Folglich ist auch 5700 durch 4 theilbar. — Weiter ist auch 7936 durch 4 theilbar, da 4 ein Theiler von 36 ist. Denn es ist $7936 = 7900 + 36$, und da 4 nach dem eben Bewiesenen in 7900 und nach der Voraussetzung in 36 aufgeht, so muß 4 auch in der Summe 7936 aufgehen.

Die Zahl 8 geht in $39000 = 39 . 1000$ auf, da $8 = 2 . 2 . 2$, $1000 = 10 . 10 . 10$ ist, und 2 in 10 aufgeht. — Ferner ist 8 ein Theiler der Zahl 425728, weil 8 in 728 aufgeht; denn es ist $425728 = 425 . 1000 + 728$.

2) Die Zahl 5 geht in 7340 auf, da $7340 = 734 . 10$ und 5 ein Theiler von 10 ist. — Ferner geht 5 in 395 auf, da es nach dem eben Bewiesenen in den Summanden der Summe $395 = 390 + 5$ aufgeht.

3) Die Zahl 564 ist durch 3 theilbar, da die Summe der Ziffern $5 + 6 + 4 = 15$ durch 3 theilbar ist. Denn es ist $564 = 5 . 100 + 6 . 10 + 4 = 5 . (99 + 1) + 6 . (9 + 1) + 4 = 5 . 99 + 6 . 9 + (5 + 6 + 4)$. In

dieser Summe sind offenbar die beiden ersten Summanden durch 3 theilbar, und da nach der Voraussetzung auch der letzte Summand 5 + 6 + 4 durch 3 theilbar ist, so geht folglich auch 3 in der ganzen Summe 564 auf.

Die Zahl 7821 ist durch 9 theilbar, da 9 in der Summe 7 + 8 + 2 + 1 = 18 aufgeht. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} 7821 &= 7 . 1000 + 8 . 100 + 2 . 10 + 1 \\ &= 7 . (999 + 1) + 8 . (99 + 1) + 2 . (9 + 1) + 1 \\ &= 7 . 999 + 8 . 99 + 2 . 9 + (7 + 8 + 2 + 1). \end{aligned}$$

In dieser Summe sind die drei ersten Summanden offenbar durch 9 theilbar und folglich auch die ganze Summe, da nach der Voraussetzung 9 auch in dem letzten Summanden (7 + 8 + 2 + 1) aufgeht.

Zusatz. Auch ließe sich noch leicht zeigen, daß eine Zahl durch 25, 125 u. s. w. theilbar ist, wenn diese Zahlen in den 2, 3 ꝛc. letzten Ziffern aufgehen.

Zusatz. Eben so sieht man auch leicht ein, daß, **wenn eine Zahl (3518) durch 3 oder 9 dividirt einen Rest (2 oder 8) läßt, man den nämlichen Rest erhält, wenn man die Summe der Ziffern (3 + 5 + 1 + 8 = 17) durch 3 oder 9 dividirt.**

Zusatz. Nach dem vorstehenden Lehrsatze und §. 285, 3 läßt sich auch leicht beurtheilen, ob eine Zahl durch 6 = 2 . 3, 12 = 3 . 4, 15 = 3 . 5 u. dgl. theilbar ist.

Lehrsatz. **Eine Zahl ist durch 11 theilbar, wenn die Summe aus der ersten, dritten, fünften Ziffer u. s. w. gleich der Summe aus der zweiten, vierten, sechsten Ziffer u. s. w. ist, oder wenn der Unterschied dieser Summen gleich 11 oder gleich einem Vielfachen von 11 ist.** — Ist z. B. die Zahl 926915 gegeben, so können wir setzen

$$\begin{aligned} 926915 &= 9 . 100900 + 2 . 10000 + 6 . 1000 + 9 . 100 + 1 . 10 + 5 \\ &= \begin{cases} 9 . (99990 + 10) + 2 . (9999 + 1) + 6 . (990 + 10) \\ + 9 . (99 + 1) + 1 . 10 + 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 9 . 99990 + 2 . 9999 + 6 . 990 + 9 . 99 \\ + 9 . 10 + 2 . 1 + 6 . 10 + 9 . 1 + 1 . 10 + 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Die gegebene Zahl 926915 ist daher durch 11 theilbar, wenn die Zahl 11 in der Summe $9 . 10 + 2 . 1 + 6 . 10 + 9 . 1 + 1 . 10 + 5$ aufgeht. Wir formen diese Summe um in

$$\begin{aligned} &9 . (11 - 1) + 2 . 1 + 6 . (11 - 1) + 9 . 1 + 1 (11 - 1) + 5 \\ &= 11 . (9 + 6 + 1) + (2 + 9 + 5) - (9 + 6 + 1). \end{aligned}$$

Die gegebene Zahl ist folglich durch 11 theilbar, da die Summe der Ziffern 2, 9, 5 gleich ist der Summe der Ziffern 9, 6, 1. Dasselbe würde auch offenbar der Fall sein, wenn der Unterschied dieser Summen gleich 11 oder gleich einem Vielfachen dieser Zahl wäre.

Lehrsatz. 1) **Ein gemeiner in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch kann nur dann vollständig als Decimalbruch dargestellt werden, wenn sein Nenner keine anderen Primzahlen zu Factoren hat, als 2 und 5. — In diesem Falle ist der Nenner ein Product aus einer Potenz von 2 und einer Potenz von 5, und die Anzahl der Decimalstellen des dem gemeinen Bruche gleichen Decimalbruchs ist dem größeren Exponenten jener beiden Potenzen gleich.**

2) **Wenn man einen gemeinen in den kleinsten Zahlen ausgedrückten ächten Bruch in einen periodischen Decimalbruch verwandelt, so erhält man einen rein periodischen Bruch, wenn der Nenner des gegebenen Bruchs durch 2 und 5 nicht theilbar ist, im entgegengesetzten Fall einen unrein periodischen Decimalbruch. — Drückt man nun den Nenner als ein Product aus drei Factoren aus, von denen der eine eine Potenz**

von 2, der andere eine Potenz von 5 und der dritte das Product aller anderen einfachen Factoren des Nenners ist, so hat der dem gegebenen Bruche gleiche Decimalbruch vor der Periode so viel Ziffern, als der größere Exponent jener beiden Potenzen anzeigt.

Bew. 1) Der Bruch $\frac{13}{40}$ läßt sich vollständig als Decimalbruch ausdrücken; denn sein Nenner $40 = 2 . 2 . 2 . 5$ enthält keine anderen Factoren als 2 und 5 und zwar den ersten dreimal, den andern nur einmal; er muß folglich in $10^3 = 2^3 . 5^3$, also auch in dem Product $13 . 10^3$ aufgehen. Demnach erhält der dem gegebenen Bruche $\frac{13}{40}$ gleiche Decimalbruch 0,325 zum Nenner 10^3, also 3 Decimalstellen. — Dagegen kann der Bruch $\frac{7}{12}$ nicht vollständig als Decimalbruch dargestellt werden, da der Nenner $12 = 2 . 2 . 3$ auch den Factor 3 enthält, welcher gegen den Zähler 7 und gegen $10 = 2 . 5$ eine relative Primzahl ist, weshalb der Nenner 12 vermöge §. 285, 2 auch nicht in einem Producte aus 7 und irgend einer Potenz von 10 aufgehen kann.

2) Wenn man einen rein periodischen Decimalbruch 0,486486... in einen gemeinen Bruch verwandelt und diesen in den kleinsten Zahlen ausdrückt, so ist der Nenner des entstandenen Bruches gegen 10 eine relative Primzahl und folglich weder durch 2 noch durch 5 theilbar. Denn nach Seite 41 hat man zur Auffindung des gesuchten gemeinen Bruches die Gleichungen

$$x = 0{,}486486\ldots$$
$$x = 486{,}486\ldots$$
$$(10^3 - 1)\,x = 486$$
$$x = \frac{486}{10^3 - 1} = \frac{486}{999} = \frac{18}{37}.$$

Nun kann 37 weder durch 2 noch durch 5 theilbar sein, weil sonst auch $999 = 27 . 37$ durch 2 oder 5 theilbar sein müßte. Dies ist aber nicht möglich, weil dann nach §. 274 auch 2 oder 5 in $1 = 10^3 - 999$ aufgehen müßte.

Wenn man einen unrein periodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelt, so enthält der Nenner desselben wenigstens eine der beiden Zahlen 2 und 5 so oft als Factor, als der Periode in dem Decimalbruche Ziffern vorangehen. — Es ist leicht zu sehen, daß die letzte der Ziffern, welche der Periode vorangehen, von der letzten Ziffer der Periode verschieden sein muß. Denn wollte man einen Bruch bilden, in welchem der Periode die Ziffern 29 vorangehen und dessen Periode 579 wäre, so würde der Bruch 0,29579579 . . entstehen, dessen Periode 957 und also eigentlich nicht 579 wäre, und es gingen also der Periode nicht 2 Ziffern 29, sondern nur eine 2 voran. Um nun einen unrein periodischen Decimalbruch 0,38276276 . . . in einen gemeinen Bruch x zu verwandeln, hat man nach S. 41 die Gleichungen

$$x = 0{,}38276276\ldots$$
$$10^2 . x = 38{,}276276\ldots$$
$$10^2 . 10^3 x = 38276{,}276\ldots$$
$$10^2(10^3 - 1)x = 38276 - 38$$
$$x = \frac{38276 - 38}{10^2(10^3 - 1)} = \frac{38238}{99900} = \frac{6373}{16650}.$$

Da nach der oben aufgestellten Behauptung die letzte der Ziffern, welche der Periode vorangehen, 8, von der letzten Ziffer der Periode 6 verschieden sein muß, so kann offenbar 10 in dem Zähler $38238 = 38276 - 38$ nicht aufgehen; es ist daher derselbe entweder durch keine der beiden Zahlen 2 und 5, oder wie hier, nur

durch die eine 2, aber nicht zugleich auch durch die andere 5 theilbar. Der Nenner 99900 hat aber den Factor $10^2 = 2 \, . \, 2 \, . \, 5 \, . \, 5$, also sowohl 2 als 5 zweimal, und da 5 im Zähler nicht enthalten ist, so muß auch jeder statt $\frac{38238}{99900}$ zu setzende aufgehobene Bruch $\frac{6373}{16650}$ im Nenner 16650 den Factor 5 zweimal enthalten.

Aus den beiden erwiesenen Behauptungen folgt aber durch Umkehrung offenbar die Richtigkeit des oben unter (2) aufgestellten Satzes.

B. Von den Kettenbrüchen.

§. 293. Erklärung.

Ein Ausdruck von der Form

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon + \text{etc.}}}}}$$

heißt ein Kettenbruch. Die Buchstaben $\alpha \; \beta \; \gamma$.. heißen die Glieder des Kettenbruchs und werden hier ausschließlich absolute ganze Zahlen bezeichnen, mit Ausnahme von α, welches auch $= 0$ sein kann. — Bricht man den Kettenbruch bei irgend einem Gliede, welches dem Endgliede vorangeht, z. B. γ ab, so heißt der entstandene abgekürzte Kettenbruch

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}$$

ein Partialbruch, Näherungsbruch oder Näherungswerth des vollständigen Kettenbruchs.

Bemerkung.

Die allgemeinste Form eines Kettenbruchs ist folgende:

$$\mathrm{a} + \cfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{c} + \cfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{e} + \cfrac{\mathrm{f}}{\mathrm{g} + \text{etc.}}}}$$

wo die Buchstaben a, b, c ... ganz beliebige Ausdrücke bezeichnen. Die oben aufgestellte Form, auf welche sich die folgende Betrachtung beschränken wird, ist offenbar ein specieller Fall von dieser allgemeinen, reicht aber aus, um die wichtigsten und am leichtesten zu begreifenden Eigenschaften der Kettenbrüche abzuleiten.

Wie wir sogleich sehen werden, läßt sich jeder gemeine Bruch in einen Kettenbruch verwandeln. Der Nutzen dieser Umwandlung besteht darin, daß sich mit Hilfe der Partialbrüche der Werth eines Bruches, welcher zum Zähler und Nenner größere Zahlen hat, in kleineren Zahlen möglichst genau ausdrücken läßt, wie wir dies weiter unten ausführlich erörtern werden.

§. 294. Aufgabe.

Einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Aufl. Man dividire mit dem Nenner in den Zähler, mit dem Reste der Division in den vorhergehenden Divisor und wiederhole diese Operation

(eben so wie in §. 289) so lange, bis kein Rest bleibt. Die erhaltenen Quotienten nach der Reihe sind die Glieder des gesuchten Kettenbruchs. — (Ist der gegebene Bruch ächt, also der Zähler kleiner als der Nenner, so ist der erste Quotient Null und der erste Rest dem Zähler selbst gleich.) — Ist z. B. der Bruch $\frac{62}{43}$ gegeben, so hat man die hier nebenstehende Rechnung auszuführen.

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r}
43 & 62 & 1 & & & \\
 & 43 & & & & \\
\hline
 & 19 & 43 & 2 & & \\
 & & 38 & & & \\
\hline
 & & 5 & 19 & 3 & \\
 & & & 15 & & \\
\hline
 & & & 4 & 5 & 1 \\
 & & & & 4 & \\
\hline
 & & & & 1 & 4 \quad 4 \\
 & & & & & 4
\end{array}$$

Demnach ist $\frac{62}{43} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}$.

Bew. Denn zufolge der vorstehenden Rechnung ist

$$\frac{62}{43} = 1 + \frac{19}{43}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{19}{43}$ durch den Zähler 19, so erhält man

$$\frac{19}{43} = \frac{1}{43 : 19} = \frac{1}{2 + \frac{5}{19}}$$

Eben so ist

$$\frac{5}{19} = \frac{1}{19 : 5} = \frac{1}{3 + \frac{4}{5}}$$

und

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{5 : 4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}.$$

Indem man aber diese Gleichungen mit einander verbindet, erhält man

$$\frac{62}{43} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}$$

Bemerkung.

Während wir durch den vorhergehenden §. in den Stand gesetzt werden, jeden gemeinen Bruch mit Leichtigkeit in einen Kettenbruch zu verwandeln, gibt uns der folgende §. ein bequemes Verfahren an, wenn ein Kettenbruch gegeben ist, die auf einander folgenden Partialbrüche, so wie auch den vollständigen Kettenbruch selbst, als gemeine Brüche darzustellen.

§. 295. Lehrsatz.

Der Zähler oder Nenner irgend eines Partialbruches wird erhalten, wenn man das letzte Glied desselben mit dem Zähler oder Nenner des nächstvorhergehenden Partialbruches multiplicirt und zum Producte den Zähler oder Nenner des vorvorhergehenden Partialbruches addirt.

Bew. Der gegebene Kettenbruch sei

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon + \text{rc.}}}}}$$

Es seien ferner die Zähler der einzelnen Partialbrüche nach der Reihe

a, b, c, d, e . . .,

die zugehörigen Nenner A, B, C, D, E . . . Dann ist

1) $\frac{a}{A} = \frac{\alpha}{1}$, also $a = \alpha$, $A = 1$,

2) $\frac{b}{B} = \alpha + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha . \beta + 1}{\beta}$, also $b = \alpha\beta + 1$, $B = \beta$.

3) $$\frac{c}{C} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}} = \alpha + \frac{\gamma}{\beta\gamma + 1} = \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma}{\beta\gamma + 1}$$
$$= \frac{(\alpha\beta + 1) . \gamma + \alpha}{\beta\gamma + 1} = \frac{b . \gamma + a}{B . \gamma + A},$$

da nach der Gleichung (1) $a = \alpha$, $A = 1$ und nach der Gleichung (2) $b = \alpha\beta + 1$ und $B = \beta$ ist.

Wollte man auf demselben Wege auch die Ausdrücke für die folgenden Partialbrüche suchen, so würde die Rechnung für jeden späteren Bruch immer weitläuftiger werden. Man kann sich aber zunächst die Rechnung für den vierten Partialbruch durch die Bemerkung abkürzen, daß dieser offenbar erhalten wird, wenn man in dem Ausdrucke für den dritten $\gamma + \frac{1}{\delta}$ an die Stelle von γ setzt. Demnach ist

4) $$\frac{d}{D} = \frac{b\left(\gamma + \frac{1}{\delta}\right) + a}{B\left(\gamma + \frac{1}{\delta}\right) + A} = \frac{b\gamma\delta + b + a\delta}{B\gamma\delta + B + A\delta} = \frac{(b\gamma + a)\delta + b}{(B\gamma + A)\delta + B} = \frac{c\delta + b}{C\delta + B},$$

indem zufolge der Gleichung (3) $b\gamma + a = c$ und $B\gamma + A = C$ ist.

Eben so geht der vierte Partialbruch in den fünften über, wenn man in den Ausdruck für jenen $\delta + \frac{1}{\varepsilon}$ an die Stelle von δ setzt; hiernach erhält man

5) $$\frac{e}{E} = \frac{c\left(\delta + \frac{1}{\varepsilon}\right) + b}{C\left(\delta + \frac{1}{\varepsilon}\right) + B} = \frac{c\delta\varepsilon + c + b\varepsilon}{C\delta\varepsilon + C + B\varepsilon} = \frac{(c\delta + b)\varepsilon + c}{(C\delta + B)\varepsilon + C} = \frac{d\varepsilon + c}{D\varepsilon + C}.$$

Man sieht nun leicht ein, daß der Gang der Rechnung für alle folgenden Partialbrüche derselbe bleiben muß, da jeder spätere aus dem nächstvorhergehenden auf gleiche Weise abgeleitet wird; es gilt daher auch das oben aufgestellte und für die ersten fünf Partialbrüche wirklich erwiesene Gesetz der Ableitung ganz allgemein für sämmtliche Partialbrüche. — Wenn also $\frac{m}{M}$, $\frac{n}{N}$ und $\frac{p}{P}$ irgend drei auf einander folgende Partialbrüche bezeichnen, und π das letzte Glied des durch $\frac{p}{P}$ bezeichneten Partialbruchs ist, so hat man allgemein

$$\frac{p}{P} = \frac{n\pi + m}{N\pi + M}.$$

Ist z. B. der Kettenbruch

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}},$$

dessen Glieder 1, 2, 3, 1, 4 sind, gegeben, so sind die auf einander folgenden Partialbrüche

1) $1 = \frac{1}{1}$, 2) $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

3) $\frac{3 \,.\, 3 + 1}{3 \,.\, 2 + 1} = \frac{10}{7}$, 4) $\frac{1 \,.\, 10 + 3}{1 \,.\, 7 + 2} = \frac{13}{9}$;

und endlich ist der vollständige Kettenbruch selbst

5) $\frac{4 \,.\, 13 + 10}{4 \,.\, 9 + 7} = \frac{62}{43}$.

Uebungsbeispiele.

Nr.	Gegeben. Bruch.	Glieder des Kettenbruchs.	Partialbrüche.
1	$\frac{725}{318}$	2, 3, 1, 1, 2, 1, 12	$\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{7}, \frac{41}{18}, \frac{57}{25}$
2	$\frac{716}{581}$	1, 4, 3, 3, 2, 2, 2	$\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{16}{13}, \frac{53}{43}, \frac{122}{99}, \frac{297}{241}$
3	$\frac{3049}{872}$	3, 2, 72, 6	$\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{507}{145}$
4	$\frac{947}{594}$	1, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 2, 3	$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{51}{32}, \frac{59}{37}, \frac{110}{69}, \frac{279}{175}$
5	$\frac{23}{176}$	0, 7, 1, 1, 1, 7	$\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{2}{15}, \frac{3}{23}$
6	$\frac{476}{583}$	0, 1, 4, 2, 4, 2, 1, 3	$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{4}{5}, \frac{9}{11}, \frac{40}{49}, \frac{89}{109}, \frac{129}{158}$
7	$\frac{112}{517}$	0, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 8	$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{3}{14}, \frac{5}{23}, \frac{8}{37}, \frac{13}{60}$
8	$\frac{415}{723}$	0, 1, 1, 2, 1, 7, 4, 3	$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{31}{54}, \frac{128}{223}$

Bemerkung.

In §. 295 haben wir gesehen, daß die zu dem Kettenbruche

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}$$

gehörigen Partialbrüche nebst dem vollständigen Kettenbruche sich in folgende gemeine Brüche verwandeln lassen $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{13}{9}, \frac{62}{43}$.

Subtrahiren wir die auf einander folgenden Brüche von einander, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{1} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1\,.\,2} \qquad \frac{3}{2} - \frac{10}{7} = +\frac{1}{14} = +\frac{1}{2\,.\,7}$$

$$\frac{10}{7} - \frac{13}{9} = -\frac{1}{63} = -\frac{1}{7\,.\,9} \qquad \frac{13}{9} - \frac{62}{43} = +\frac{1}{387} = +\frac{1}{9\,.\,43}.$$

Der folgende §. zeigt, daß das hier an einem bestimmten Beispiele entwickelte Gesetz ganz allgemein von jedem Kettenbruche gilt.

§. 296. Lehrsatz.

Die Differenz zweier aufeinander folgenden Partialbrüche ist allemal einem Bruche gleich, welcher zum Zähler die Einheit, zum Nenner das Product der Nenner der beiden Partialbrüche hat, und zwar ist diese Differenz negativ, wenn man vom ersten Partialbruche den zweiten, vom dritten den vierten, vom fünften den sechsten u. s. f. subtrahirt, positiv, wenn man vom zweiten Partialbruche den dritten, vom vierten den fünften, vom sechsten den siebenten u. s. f. subtrahirt. Es ist nämlich nach der im vorhergehenden §. angenommenen Bezeichnung

$$1)\ \frac{a}{A} - \frac{b}{B} = -\frac{1}{AB}. \qquad 2)\ \frac{b}{B} - \frac{c}{C} = +\frac{1}{BC}$$

$$3)\ \frac{c}{C} - \frac{d}{D} = -\frac{1}{CD}. \qquad 4)\ \frac{d}{D} - \frac{e}{E} = +\frac{1}{DE}\ \text{u. s. f.}$$

Bew. Es ist 1) $\frac{a}{A} - \frac{b}{B} = \frac{aB - Ab}{AB}$, und da nach dem vorhergehenden §. $a = \alpha$, $A = 1$, $b = \alpha\beta + 1$ und $B = \beta$ ist, so ist dieser Ausdruck

$$= \frac{\alpha\beta - 1\,.\,(\alpha\beta + 1)}{AB} = \frac{-1}{AB}.$$

$$2)\ \frac{b}{B} - \frac{c}{C} = \frac{bC - Bc}{BC} = \frac{b(B\gamma + A) - B(b\gamma + a)}{BC} = \frac{Ab - aB}{BC} = +\frac{1}{BC},$$

indem nach Gleichung (1) $\frac{aB - Ab}{AB} = -\frac{1}{AB}$,

folglich $aB - Ab = -1$ oder $Ab - aB = +1$ ist.

$$3)\ \frac{c}{C} - \frac{d}{D} = \frac{cD - Cd}{CD} = \frac{c(C\delta + B) - C(c\delta + b)}{CD} = \frac{Bc - bC}{DC} = -\frac{1}{CD},$$

indem aus Gleichung (2) offenbar $bC - Bc = +1$ hervorgeht.

Eben so findet man

$$4)\ \frac{d}{D} - \frac{e}{E} = \frac{dE - De}{DE} = \frac{d(D\varepsilon + C) - D(d\varepsilon + c)}{DE} = \frac{Cd - cD}{DE} = +\frac{1}{DE}$$

Auch sieht man nun leicht, da jeder folgende Partialbruch auf gleiche Weise aus den beiden vorhergehenden abgeleitet wird, daß das in den vorstehenden Gleichungen für die fünf ersten erwiesene Gesetz eben so für alle folgenden gelten müsse. Sind daher überhaupt $\frac{m}{M}$ und $\frac{n}{N}$ zwei auf einander folgende Partialbrüche, so ist

$$\frac{m}{M} - \frac{n}{N} = \pm\frac{1}{MN},$$

wo das Zeichen (+) oder (—) gilt, je nachdem die Zahl, welche anzeigt, die wievielte Stelle $\frac{m}{M}$ in der Reihe der Partialbrüche einnimmt, gerade oder ungerade ist.

§. 297. Zusatz.

1) Da nach dem vorherg. §. die Differenzen der aufeinander folgenden Partialbrüche abwechselnd negativ und positiv sind, so nehmen die Partialbrüche abwechselnd zu und ab; es ist nämlich der erste Partialbruch kleiner als der zweite, der zweite größer als der dritte, der dritte kleiner als der vierte u. s. w.

2) Diese Differenzen werden (abgesehen vom Vorzeichen) immer kleiner, und zwar in der Art, daß jede folgende Differenz weniger als die Hälfte der vorhergehenden beträgt. — Nur die zweite Differenz kann, wenn im besonderen Falle das zweite und dritte Glied eines Kettenbruches gleich Eins sind, der Hälfte der ersten Differenz gleich werden. — Denn da diese Differenzen

$$\frac{1}{AB}, \frac{1}{BC}, \frac{1}{CD}, \frac{1}{DE} \text{ u. s. f.}$$

Brüche mit gleichem Zähler sind, so verhalten sie sich folglich umgekehrt wie ihre Nenner. Wir erhalten so zunächst für die erste und zweite Differenz die Proportion

$$\frac{1}{AB} : \frac{1}{BC} = C : A.$$

Nach §. 295 ist $C = B\gamma + A$, oder da $B = \beta$ und $A = 1$ ist, $C = \beta\gamma + 1$. Sind nun β und γ beide $= 1$, so ist $C = 2$, also C doppelt so groß als A und folglich die zweite Differenz $\frac{1}{BC}$ der Hälfte der ersten Differenz $\frac{1}{AB}$ gleich. In jedem anderen Falle dagegen ist $C = \beta\gamma + 1 > 2$, also da $A = 1$ ist, $C > 2A$ und folglich die zweite Differenz $\frac{1}{BC}$ kleiner als die Hälfte der ersten $\frac{1}{AB}$.

Weiter verhält sich die zweite Differenz zur dritten,

$$\frac{1}{BC} : \frac{1}{CD} = D : B.$$

Nach §. 295 ist $D = C\delta + B$; da nun $C = B\gamma + A$, also C jedenfalls $> B$ ist, so ist folglich $D > 2B$ und daher die dritte Differenz $\frac{1}{CD}$ allemal kleiner als die Hälfte der zweiten $\frac{1}{BC}$.

Eben so läßt sich zeigen, daß die vierte Differenz $\frac{1}{DE}$ kleiner als die Hälfte der dritten Differenz $\frac{1}{CD}$ ist u. s. w.

§. 298. Lehrsatz.

Von den auf einander folgenden Partialbrüchen ist der erste kleiner, der zweite größer, der dritte wieder kleiner, der vierte größer als der vollständige Kettenbruch u. s. w. Es liegt daher der Kettenbruch zwischen je zwei auf einander folgenden Partialbrüchen, und jeder folgende Partialbruch ist von dem vollständigen Kettenbruche weniger verschieden als der vorhergehende.

Bew. Um größerer Anschaulichkeit willen wollen wir von einem bestimmten Falle ausgehen und annehmen, daß der gegebene Kettenbruch sechs Glieder enthält. Bezeichnen wir nun die fünf Partialbrüche desselben nach der Reihe

durch $\frac{a}{A}, \frac{b}{B}, \frac{c}{C}, \frac{d}{D}, \frac{e}{E}$ und den vollständigen Kettenbruch selbst durch $\frac{f}{F}$, so ist nach §. 296 $\quad 1) \ \frac{a}{A} - \frac{b}{B} = -\frac{1}{AB}$

$$2) \ \frac{b}{B} - \frac{c}{C} = +\frac{1}{BC} \qquad 3) \ \frac{c}{C} - \frac{d}{D} = -\frac{1}{CD}$$

$$4) \ \frac{d}{D} - \frac{e}{E} = +\frac{1}{DE} \qquad 5) \ \frac{e}{E} - \frac{f}{F} = -\frac{1}{EF}.$$

Addiren wir die Gleichungen (1) bis (5), ferner (2) bis (5), so erhalten wir

$$6) \ \frac{a}{A} - \frac{f}{F} = -\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{BC}\right) - \left(\frac{1}{CD} - \frac{1}{DE}\right) - \frac{1}{EF}$$

$$7) \ \frac{b}{B} - \frac{f}{F} = +\left(\frac{1}{BC} - \frac{1}{CD}\right) + \left(\frac{1}{DE} - \frac{1}{EF}\right).$$

Da in diesen Gleichungen die eingeschlossenen Glieder sämmtlich positive Zahlen sind, indem nach §. 297, 2 in jeder dieser Differenzen der Minuend größer ist, als der Subtrahend, so ist vermöge Gleichung (6) der erste Partialbruch $\frac{a}{A}$ kleiner und vermöge Gleichung (7) der zweite Partialbruch $\frac{b}{B}$ größer als der vollständige Kettenbruch $\frac{f}{F}$.

Eben so läßt sich zeigen, daß der dritte Partialbruch wieder kleiner, der vierte aber größer ist, als der vollständige Kettenbruch u. s. w. Es liegt daher der vollständige Kettenbruch zwischen je zwei auf einander folgenden Partialbrüchen.

Nach §. 297 ist der zweite Partialbruch größer als der erste und der dritte kleiner als der zweite, aber der Unterschied zwischen dem dritten und zweiten kleiner (oder höchstens eben so groß) als die Hälfte des Unterschieds zwischen dem zweiten und ersten; es liegt daher der dritte Partialbruch zwischen dem ersten und zweiten und ist vom zweiten weniger (oder höchstens eben so viel) entfernt, als vom ersten. Da nun, wie wir so eben gesehen haben, der vollständige Kettenbruch auch zwischen dem zweiten und dritten Partialbruche liegt, so muß derselbe jedenfalls vom ersten Partialbruche weiter als vom zweiten abstehen.

Eben so läßt sich zeigen, daß der vollständige Kettenbruch vom dritten Partialbruche weniger als vom zweiten, vom vierten weniger als vom dritten u. s. w. verschieden ist.

Wenn wir uns die Größen der auf einander folgenden Partialbrüche durch die Linien k 1, k 2, k 3 u. s. w. vorgestellt denken,

k 1 3 5 6 4 2

so geben die Linien (1, 2) (2, 3) u. s. w. die Unterschiede zwischen dem ersten und zweiten, zweiten und dritten Partialbruche an u. s. w. Nun darf nach §. 297, 2 die Linie (2, 3) höchstens der Hälfte der Linie (1, 2) gleich sein; ferner muß (3, 4) jedenfalls kleiner als die Hälfte von (2, 3), (4, 5) kleiner als die Hälfte von (3, 4) u. s. w. sein. Man sieht dann aus dem Anblicke der Figur auf der Stelle, daß je zwei auf einanderfolgende Partialbrüche alle späteren, so wie auch den vollständigen Kettenbruch (k6) einschließen, und daß jeder folgende Partialbruch dem vollständigen Kettenbruche näher kommt, als jeder vorangehende.

§. 299. Lehrsatz.

Jeder Partialbruch ist von dem vollständigen Kettenbruche um weniger verschieden als ein Bruch, welcher zum Zähler die Einheit und zum Nenner das Product aus dem Nenner dieses und des nächstfolgenden Partialbruches hat.

Bew. Denn nach §. 296 unterscheiden sich die beiden Partialbrüche um einen Bruch von der angegebenen Größe von einander, und da der vollständige Kettenbruch nach §. 298 zwischen denselben liegt, so muß er von jedem derselben um weniger verschieden sein.

In dem §. 295 angeführten Beispiele sind die Partialbrüche und der vollständige Bruch folgende
$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{13}{9}, \frac{62}{43}.$$
Wenn wir daher statt des vollständigen Bruches $\frac{62}{43}$ z. B. den dritten Partialbruch $\frac{10}{7}$ setzen, so ist der Fehler, welchen wir hierbei begehen, kleiner als $\frac{1}{7 \,.\, 9} = \frac{1}{63}$.

§. 300. Lehrsatz.

Jeder nach §. 295 dargestellte Partialbruch, so wie auch der vollständige Kettenbruch ist allemal ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter gemeiner Bruch.

Bew. Es sei $\frac{n}{N}$ irgend ein Partialbruch oder der vollständige Bruch und $\frac{m}{M}$ der nächstvorhergehende Partialbruch; dann ist nach §. 296
$$\frac{m}{M} - \frac{n}{N} = \frac{mN - nM}{MN} = \pm \frac{1}{MN},$$
folglich
$$mN - nM = \pm 1.$$
Wenn nun n und N einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, so müßte dieser auch in der Differenz $mN - nM = \pm 1$ aufgehen, was unmöglich ist. Demnach ist $\frac{n}{N}$ ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch.

§. 301. Lehrsatz.

Die auf einander folgenden Partialbrüche geben die Größe des vollständigen Kettenbruchs in den kleinsten Zahlen möglichst genau an.

Bew. Es sei $\frac{u}{U}$ ein Bruch, welcher sich vom vollständigen Kettenbruche um weniger unterscheidet, als irgend ein Partialbruch $\frac{n}{N}$, so läßt sich zeigen, daß $U > N$ ist. Denn ist $\frac{m}{M}$ der $\frac{n}{N}$ vorangehende Partialbruch, so liegt nach §. 298 der vollständige Kettenbruch zwischen $\frac{m}{M}$ und $\frac{n}{N}$, aber näher an $\frac{n}{N}$ als an $\frac{m}{M}$. Soll nun der Bruch $\frac{u}{U}$ dem vollständigen Bruche noch näher als $\frac{n}{N}$ kommen, so muß derselbe offenbar ebenfalls zwischen $\frac{m}{N}$ und $\frac{n}{N}$ liegen. Demnach muß abgesehen vom Vorzeichen sein
$$\frac{m}{M} - \frac{n}{N} > \frac{m}{M} - \frac{u}{U},$$
d. h. vermöge §. 296
$$\frac{1}{MN} > \frac{mU - uM}{MU},$$
oder wenn wir die Brüche wegschaffen,
$$U > N \,.\, (mU - uM).$$

Nun kann mU — uM nicht = 0 sein, weil hieraus mU = uM, also gegen die Annahme $\frac{u}{U} = \frac{m}{M}$ folgen würde. Demnach muß die Differenz mU — uM von Null verschieden, und da m, M, u und U ganze Zahlen vorstellen, ebenfalls eine ganze Zahl, also entweder = 1 oder > 1 sein. In beiden Fällen folgt aber aus der zuletzt erwiesenen Ungleichung

$$U > N,$$ w. z. b. w.

Aus dem so eben geführten Beweise geht auch noch hervor, daß sich zwischen zwei auf einander folgenden Partialbrüchen überhaupt kein in kleineren Zahlen ausgedrückter Bruch einschalten läßt.

Als Anwendungen der vorhergehenden allgemeinen Sätze können folgende Beispiele dienen:

1) Ein Meter ist (ohngefähr) = 3,186 preußische Fuß. Es soll das Verhältniß des Meters zum Fuße in kleineren Zahlen möglichst genau ausgedrückt werden.

Aufl. $\frac{3}{1}, \frac{16}{5}, \frac{35}{11}, \frac{51}{16}, \frac{86}{27}, \frac{137}{43}$.

Von diesen Verhältnissen empfiehlt sich besonders das zweite $\frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$, welches von der Wahrheit um weniger als $\frac{1}{55}$ abweicht, durch seine Einfachheit für den praktischen Gebrauch.

2) Dieselbe Aufgabe für das Kilometer, welches (ohngefähr) = 0,1350 geogr. Meilen ist.

Aufl. $\frac{1}{7}, \frac{2}{15}, \frac{5}{37}, \frac{27}{200}$.

(Wenn man also das Kilometer zu $\frac{2}{15}$ Meilen annimmt, so beträgt der Fehler weniger als $\frac{1}{555}$ Meile.)

3) Dieselbe Aufgabe für das Hektar, welches (ohngefähr) = 3,9162 preußische Morgen ist.

Aufl. $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{43}{11}, \frac{47}{12}, \frac{611}{167}$. $\frac{654}{167}$

(Nimmt man das Hektar zu $\frac{47}{12}$, d. h. zu 4 weniger $\frac{1}{12}$ Morgen an, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{1004}$, also kleiner als 0,001 Morgen.)

4) Dieselbe Aufgabe für das Liter, welches (ohngefähr) = 0,873 preuß. Quart ist.

Aufl. $\frac{1}{1}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{48}{55}, \frac{55}{63}$.

(Das dritte Verhältniß $\frac{7}{8}$ weicht von der Wahrheit um weniger als $\frac{1}{440}$ ab.)

5) Dieselbe Aufgabe für das Hectoliter, welches ohngefähr = 1,8195 preußische Scheffel ist.

Aufl. $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{20}{11}, \frac{111}{61}$ u. s. w.

(Das fünfte Verhältniß $\frac{20}{11}$ weicht von der Wahrheit um weniger als $\frac{1}{671}$ ab.)

6) Dieselbe Aufgabe für die englische Meile, welche ohngefähr = 0,2171 geogr. Meilen ist.

Aufl. $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{3}{14}$ u. s. w.

(Wenn man hiernach die englische Meile $= \frac{2}{9}$ geogr. Meilen setzt, so beträgt der Fehler weniger als $\frac{1}{126}$ Meile.)

7) Dieselbe Aufgabe für das Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser, welches ohngefähr $= 3{,}14159$ ist.

Aufl. $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}$ u. s. w.

(Das so sehr bequeme zweite Verhältniß $\frac{22}{7}$ entfernt sich von der Wahrheit um weniger als $\frac{1}{742}$.)

C. Von den diophantischen Gleichungen.

§. 302. Erklärung.

Wenn zwischen zwei Unbekannten x und y eine einzige Gleichung

$$ax + by = c$$

gegeben ist, so können in derselben x und y alle möglichen Zahlen vorstellen; denn zu jedem willkürlich angenommenen Werthe der einen Unbekannten x findet sich immer ein passender Werth von y, welcher mit dem willkürlich angenommenen Werthe von x verbunden der gegebenen Gleichung Genüge thut. Wenn wir aber noch die Bedingung hinzufügen, daß die Unbekannten x und y ausschließlich (positive oder negative) ganze Zahlen oder Null vorstellen sollen, so werden wir dieselben nicht mehr ganz beliebig annehmen dürfen. Die obige Gleichung wird zwar auch jetzt noch unzählige verschiedene Auflösungen zulassen. Wir werden aber statt x und y nicht mehr jede willkürliche Zahl, sondern nur gewisse, ein bestimmtes Gesetz befolgende Zahlen setzen dürfen, wenn die aufgestellte Bedingung erfüllt werden soll.

Man nennt solche Gleichungen mit zwei oder mehreren Unbekannten, welche nur unter der Voraussetzung gelten sollen, daß die Unbekannten ausschließlich ganze Zahlen vorstellen, unbestimmte oder diophantische Gleichungen. — Wir beschränken uns hier auf Gleichungen vom ersten Grade, weil die Auflösung der unbestimmten Gleichungen vom zweiten oder von höheren Graden mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden ist.

Wenn z. B. die Gleichung $3x + 4y = 29$ gegeben ist, so können wir sowohl x als auch y ganz willkürlich annehmen. Setzen wir z. B. $x = 1$, so finden wir als zugehörigen Werth $y = 6\frac{1}{2}$; nehmen wir $x = 2$ an, so ergibt sich $y = 5\frac{3}{4}$ u. s. w. Auf gleiche Weise können wir statt der andern Unbekannten y jede beliebige Zahl setzen und den zugehörigen Werth von x berechnen. Sollen aber x und y ausschließlich ganze Zahlen bezeichnen, so dürfen wir dieselben nicht mehr ganz willkürlich annehmen; vielmehr gibt es dann nur gewisse, nach einem bestimmten Gesetze fortschreitende Zahlen, welche, in der obigen Gleichung statt x und y gesetzt, derselben Genüge thun. Solche Zahlen sind z. B. folgende:

$$x = +3, \quad y = +5$$
$$x = +7, \quad y = +2$$
$$x = +11, \quad y = -1$$
$$x = +15, \quad y = -4 \text{ u. s. w.}$$

Sollen x und y positive Zahlen bedeuten, so hat die obige Gleichung nur zwei Auflösungen.

§. 303. Zusatz.

Bezeichnen a, b und c ausschließlich positive Zahlen, so haben wir bei einer geordneten Gleichung vom ersten Grade mit zwei Unbekannten folgende vier Fälle zu unterscheiden:

1) $ax + by = + c$
2) $ax + by = - c$
3) $ax - by = + c$
4) $ax - by = - c$.

Wir haben uns hier darauf beschränkt, den Coefficienten des ersten Gliedes als positiv anzunehmen, weil die Annahme des Gegentheils sich dadurch beseitigen läßt, daß man in der gegebenen Gleichung alle Zeichen umkehrt. Da ferner Brüche durch Multiplication der ganzen Gleichung mit dem General-Nenner sich leicht wegschaffen lassen, so wollen wir im Folgenden durchgehends annehmen, daß in den oben aufgeführten Gleichungen die Buchstaben a, b und c ausschließlich positive ganze Zahlen bezeichnen.

Von diesen Gleichungen werden einerseits (1) und (2) und andererseits (3) und (4), wie wir weiter unten sehen werden, auf ganz gleiche Weise aufgelöst. Wir fassen daher die obigen vier Fälle in folgende zwei Hauptfälle zusammen: $ax + by = \pm c$
und $ax - by = \pm c$.
Der erste Fall umfaßt alle diejenigen Gleichungen, in denen die Coefficienten von x und y dasselbe Vorzeichen haben, und der zweite Fall diejenigen Gleichungen, in denen diese Vorzeichen verschieden sind.

§. 304. Lehrsatz.

Wenn in den Gleichungen

$$ax + by = \pm c$$

und

$$ax - by = \pm c$$

die Coefficienten a und b einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so muß derselbe auch in c aufgehen; entgegengesetzten Falles würde es gar nicht möglich sein, diese Gleichungen in ganzen Zahlen aufzulösen.

Bew. Denn nach §. 274 ist jeder gemeinschaftliche Theiler von a und b auch ein Theiler der Summe $ax + by = \pm c$ und der Differenz $ax - by = \pm c$.

So kann z. B. die Gleichung $6x + 9y = 88$ niemals in ganzen Zahlen aufgelöst werden, da die Summe $6x + 9y$, was man auch statt x und y für ganze Zahlen setzen mag, allemal einem Vielfachen von 3 gleich wird, also niemals gleich 88 werden kann.

§. 305. Lehrsatz.

Wenn man ein Paar zusammengehörige Werthe von x und y kennt, welche der Gleichung

$$ax - by = \pm c$$

Genüge thun, so erhält man neue Auflösungen dieser Gleichungen, wenn man zum Werthe von x den Coefficienten von y und zum Werthe von y den Coefficienten von x gleichvielmal addirt oder davon subtrahirt. — Wenn nämlich die Werthe

$$x = \alpha \text{ und } y = \beta$$

der obigen Gleichung entsprechen und n irgend eine positive oder negative Zahl vorstellt, so genügen auch die Werthe

$$x = \alpha + nb \text{ und } y = \beta + na$$

dieser Gleichung.

Bew. Da nach der Voraussetzung der gegebenen Gleichung durch die Annahme $x = \alpha$ und $y = \beta$ Genüge geschieht, so ist folglich

$$a\alpha - b\beta = \pm c.$$

Setzen wir ferner in der gegebenen Gleichung $x = \alpha + nb$ und $y = \beta + na$, so verwandelt sich dieselbe in

$$a(\alpha + nb) - b(\beta + na) = \pm c,$$

oder wenn wir die Klammern auflösen,

$$a\alpha + nab - b\beta - nab = \pm c$$

oder $$a\alpha - b\beta = \pm c,$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit, wie wir so eben gesehen haben, aus der Voraussetzung folgt.

Ist z. B. die Gleichung $5x - 3y = 7$

gegeben, so wird man leicht folgende Auflösung als richtig erkennen:

$$x = 2, \quad y = 1.$$

Addiren wir nun zu dem Werthe von x wiederholt 3 und zu dem Werthe von y wiederholt 5, so erhalten wir weiter folgende Auflösungen:

$$x = 5, \quad y = 6$$
$$x = 8, \quad y = 11$$
$$x = 11, \quad y = 16$$
$$x = 14, \quad y = 21 \text{ u. s. w.}$$

Eben so erhält man richtige Auflösungen, aber in negativen Zahlen, wenn man von dem Werthe von $x = 2$ wiederholt 3 und von dem Werthe von $y = 1$ wiederholt 5 subtrahirt, nämlich folgende:

$$x = -1, \quad y = -4$$
$$x = -4, \quad y = -9$$
$$x = -7, \quad y = -14 \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null, so lassen sich sämmtliche Auflösungen der Gleichung

$$5x - 3y = 7$$

in die beiden folgenden Ausdrücke zusammenfassen

$$x = 2 + 3n, \quad y = 1 + 5n.$$

§. 306. Lehrsatz.

Wenn ein Paar zusammengehörige Werthe von x und y bekannt sind, welche der Gleichung

$$ax + by = \pm c$$

Genüge leisten, so erhält man weitere Auflösungen dieser Gleichung, wenn man zu dem Werthe der einen Unbekannten, z. B. zu dem Werthe von x den Coefficienten der andern Unbekannten y wiederholt addirt und von dem Werthe von y den Coefficienten von x eben so vielmal subtrahirt. — Wenn also die Werthe

$$x = \alpha \text{ und } y = \beta$$

der obigen Gleichung Genüge thun, so sind die allgemeinen Auflösungen dieser Gleichung $x = \alpha + nb$ und $y = \beta - na$,

wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null bezeichnet.

Bew. Wenn wir in der gegebenen Gleichung $x = \alpha$ und $y = \beta$ setzen, so erhalten wir folgende nach der Voraussetzung richtige Gleichung:

$$a\alpha + b\beta = \pm c.$$

Setzen wir ferner in der gegebenen Gleichung $x = \alpha + nb$ und $y = \beta - na$, so verwandelt sich dieselbe in

$$a(\alpha + nb) + b(\beta - na) = \pm c,$$

oder wenn wir die Klammern auflösen,

$$a\alpha + nab + b\beta - nab = \pm c,$$

oder
$$a\alpha + b\beta = \pm c,$$
eine Gleichung, welche zufolge der Voraussetzung richtig ist.

Es sei z. B. die Gleichung
$$4x + 7y = 90$$
gegeben, so findet man leicht, daß derselben durch die Annahme
$$x = 5,\ y = 10$$
genügt wird. Weitere Auflösungen werden erhalten, wenn wir zu dem Werthe von x wiederholt 7 addiren und von dem Werthe von y wiederholt 4 subtrahiren. Wir finden auf diese Art
$$x = 12,\ y = 6$$
$$x = 19,\ y = 2$$
$$x = 26,\ y = -2$$
$$x = 33,\ y = -6 \text{ u. s. w.}$$

Eben so gelangen wir auch zu richtigen Auflösungen, wenn wir von dem Werthe $x = 5$ wiederholt 7 subtrahiren, dagegen zu dem Werthe $y = 10$ wiederholt 4 addiren; wir erhalten so
$$x = -2,\ y = 14$$
$$x = -9,\ y = 18$$
$$x = -16,\ y = 22 \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet n eine beliebige positive oder negative Zahl oder Null, so lassen sich sämmtliche Auflösungen der obigen Gleichung in die folgenden allgemeinen Formeln zusammenfassen:
$$x = 5 + 7n \text{ und } y = 10 - 4n.$$

§. 307. Aufgabe.

Die unbestimmte Gleichung
$$ax - by = \pm 1$$
in ganzen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Man verwandele den Bruch $\frac{a}{b}$ nach §. 294 in einen Kettenbruch und bilde nach §. 295 die zu demselben gehörigen Partialbrüche. Ist dann der dem vollständigen Bruche unmittelbar vorangehende Partialbruch $\frac{\beta}{\alpha}$, so ist nach §. 296
$$a\alpha - b\beta = \pm 1.$$
Stimmt diese Gleichung in dem Vorzeichen vor 1 mit der gegebenen Gleichung überein, so geschieht dieser durch die Annahme
$$x = \alpha \text{ und } y = \beta,$$
im entgegengesetzten Falle aber durch die Annahme
$$x = -\alpha \text{ und } y = -\beta$$
Genüge. Die übrigen Auflösungen der gegebenen Gleichung können nun leicht nach §. 305 dargestellt werden.

Es sei die Gleichung
$$27x - 10y = +1$$
gegeben. Verwandeln wir $\frac{27}{10}$ in einen Kettenbruch, so erhalten wir
$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}$$
die zugehörigen Partialbrüche nebst dem vollständigen Bruche sind
$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{8}{3},\ \frac{27}{10}.$$

Nun ist $27 \, . \, 3 - 10 \, . \, 8 = + 1.$

Da diese Gleichung in dem Vorzeichen vor 1 mit der gegebenen Gleichung übereinstimmt, so erhalten wir zunächst folgende Auflösung:

$$x = 3 \text{ und } y = 8$$

und dann weiter nach §. 305 folgende Auflösungen:

$$x = 13, \; y = 35$$
$$x = 23, \; y = 62$$
$$x = 33, \; y = 89 \text{ u. s. w.}$$

allgemein $x = 3 + 10n$ und $y = 8 + 27n.$

Es sei ferner die Gleichung $8x - 11y = + 1$

gegeben, verwandeln wir $\frac{11}{8}$ in einen Kettenbruch, so sind die Glieder desselben 1, 2, 1, 2 und die Partialbrüche nebst dem vollständigen Bruche $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{11}{8}.$

Nun ist $8 \, . \, 4 - 3 \, . \, 11 = - 1.$

Da in dieser Gleichung vor 1 das entgegengesetzte Vorzeichen wie in der gegebenen steht, so haben wir $x = - 4$ und $y = - 3$

zu setzen und erhalten dann weiter nach §. 305 folgende Auflösungen:

$$x = + 7, \; y = + 5$$
$$x = + 18, \; y = + 13$$
$$x = + 29, \; y = + 21 \text{ u. s. w.}$$

allgemein: $x = 7 + 11n$ und $y = 5 + 8n.$

Da der obigen Gleichung auch die Werthe $x = - 4$ und $y = - 3$ Genüge thun, so können wir die allgemeinen Auflösungen auch so schreiben

$$x = 11n - 4 \text{ und } y = 8n - 3.$$

Diese Formeln geben, wenn man in denselben statt n die Zahlen 1, 2, 3 . . . setzt, gerade dieselben Werthe für x und y, wie die vorher aufgestellten Formeln, wenn man in denselben statt n die Zahlen 0, 1, 2 . . . setzt. Ueberhaupt sieht man wohl leicht ein, daß sich die allgemeinen Auflösungen einer jeden Gleichung auf mannigfaltige Weise schreiben lassen, da man bei Aufstellung der allgemeinen Formeln von jeder der besonderen Auflösung ausgehn kann. Da n in diesen Formeln jede beliebige positive oder negative Zahl oder Null vorstellt, so müssen zwei Formeln die nämlichen Resultate liefern, wenn sich die eine dadurch, daß man in derselben $n + 1, n + 2, n + 3 \ldots$ oder $n - 1, n - 2, n - 3 \ldots$ statt n setzt, in die andere verwandeln läßt.

Zur Uebung können folgende **Beispiele** dienen:

1. Aufg. $7x - 17y = 1$

Aufl.	$x = 5$	22	39	56	73...	$5 + 17n$
	$y = 2$	9	16	23	30...	$2 + 7n$

2. Aufg. $14x - 11y = 1$

Aufl.	$x = 4$	15	26	37	48...	$4 + 11n$
	$y = 5$	19	33	47	61...	$5 + 14n$

3. Aufg. $51x - 16y = 1$

Aufl.	$x = - 5$	+ 11	27	43	59...	$11 + 16n$
	$y = - 16$	+ 35	86	137	188...	$35 + 51n$

4. Aufg. $33x - 28y = - 1$

Aufl.	$x = 11$	39	67	95	123...	$11 + 28n$
	$y = 13$	46	79	112	145...	$13 + 33n$

5. Aufg. $11x - 19y = - 1$

Aufl.	$x = - 7$	+ 12	31	50	69...	$12 + 19n$
	$y = - 4$	+ 7	18	29	40...	$7 + 11n$

§. 308. Aufgabe.

Die unbestimmte Gleichung

$$ax' - by' = \pm c$$

in ganzen Zahlen aufzulösen.

Aufl. Man suche nach §. 307 eine Auflösung der Gleichung

$$ax' - by' = \pm 1$$

und multiplicire die erhaltenen Zahlen mit c; dann bilden diese Producte eine Auflösung der gegebenen Gleichung, aus welcher sich nun leicht nach §. 305 weitere Auflösungen bilden lassen, indem man zu dem Werthe von x den Coefficienten von y und zu dem Werthe von y den Coefficienten von x wiederholt addirt oder davon subtrahirt.

Es sei zunächst die Gleichung

$$10x - 13y = +3$$

gegeben. Suchen wir zuerst nach §. 307 eine Auflösung der Gleichung

$$10x' - 13y' = +1,$$

so finden wir leicht $x' = 4, \quad y' = 3,$

und indem wir diese Zahlen mit 3 multipliciren, erhalten wir für die gegebene Gleichung die Auflösung $x = 12, \quad y = 9$

und hieraus ferner nach §. 305

$$x = 25, \quad y = 19$$
$$x = 38, \quad y = 29$$
$$x = 51, \quad y = 39 \text{ u. s. w.}$$

allgemein: $x = 12 + 13n, \quad y = 9 + 10n.$

Es sei ferner die Gleichung

$$25x - 16y = 73$$

gegeben. Wollte man hier genau dasselbe Verfahren wie bei dem vorhergehenden Beispiele anwenden, so würde man zuerst (vermöge der Multiplication mit 73) zu sehr großen (negativen) Zahlen gelangen. Weil man aber in der Regel die Auflösung einer unbestimmten Gleichung vorzugsweise in den möglich kleinsten (positiven) Zahlen zu erhalten wünscht, so kann man sich die Rechnung durch folgendes Verfahren abkürzen. Man dividire 73 durch 25 und 16 und sehe zu, von welchem Vielfachen dieser beiden Zahlen 73 am wenigsten verschieden ist. Man findet so als die kleinste Differenz $73 - 3 . 25 = -2$. Demgemäß setze man in der obigen Gleichung $73 = 3 . 25 - 2$, wodurch diese Gleichung sich verwandelt in

$$25x - 16y = 25 . 3 - 2.$$

oder wenn wir transponiren $25(x - 3) - 16y = -2.$

Man setze weiter $x - 3 = u$, so erhält man $25u - 16y = -2.$

Man löse hierauf die Gleichung $25u' - 16y' = -1$

auf, so ergibt sich $u' = 7, \quad y' = 11,$

folglich $u = 14, \quad y = 22.$

Es war $x - 3 = u$, also ist $x = u + 3$; man erhält hiernach für die gegebene Gleichung zunächst die Auflösung

$$x = 17, \quad y = 22$$

und dann weiter nach §. 305 $x = 33, \quad y = 47$

$$x = 47, \quad y = 72 \text{ u. s. w.}$$

allgemein: $x = 17 + 16n, \quad y = 22 + 25n.$

Endlich wollen wir noch die Ausrechnung für folgendes Beispiel hersetzen:

$$41x - 36y = 187.$$

Man zerfällt hier 187 am vortheilhaftesten in $36 . 5 + 7$; dann erhält man

$$41x - 36y = 36 . 5 + 7$$

oder $41x - 36(y + 5) = +7.$

Man setze $y + 5 = u$, so ist $41x - 36u = +7$.
Löst man die Gleichung $41x' - 36u' = +1$
nach §. 307 auf, so erhält man

$$x' = -7, \quad u' = -8,$$

folglich

$$x = -49, \quad u = -56.$$

Es war $y + 5 = u$, also ist $y = u - 5$; demnach ergibt sich für die gegebene Gleichung zunächst die Auflösung

$$x = -49, \quad y = -61$$

und hieraus weiter nach §. 305

$$x = -13, \quad y = -20$$

$$x = +23, \quad y = +21 \text{ u. s. w.}$$

allgemein:

$$x = 23 + 36n, \quad y = 21 + 41n.$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

1. Aufg. $13x - 15y = 2$

Aufl.	$x = 14$	29	44	59	74...	$14 + 15n$
	$y = 12$	25	38	51	64...	$12 + 13n$

2. Aufg. $17x - 7y = 6$

Aufl.	$x = -12$	-5	$+2$	$+9$...	$2 + 7n$
	$y = -30$	-13	$+4$	$+21$...	$4 + 17n$

3. Aufg. $8x - 27y = 201$

Aufl.	$x = +15$	$+42$	$+69$	$+96$...	$42 + 27n$
	$y = -3$	$+5$	$+13$	$+21$...	$5 + 8n$

4. Aufg. $18x - 13y = 89$

Aufl.	$x = -15$	-2	$+11$	$+24$...	$11 + 13n$
	$y = -26$	-8	$+10$	$+28$...	$10 + 18n$

5. Aufg. $26x - 31y = 68$

Aufl.	$x = -24$	$+7$	$+38$	$+69$...	$7 + 31n$
	$y = -23$	$+3$	$+29$	$+55$...	$3 + 26n$.

§. 309. Aufgabe.

Die unbestimmte Gleichung

$$ax + by = \pm 1$$

in ganzen Zahlen aufzulösen.

Aufl. Man verwandele $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und stelle nach §. 295 die zugehörigen Partialbrüche her. Ist dann $\frac{\beta}{\alpha}$ der dem vollständigen Bruche vorangehende Partialbruch, so ist nach §. 296

$$a\alpha - b\beta = \pm 1.$$

Stimmt diese Gleichung in dem Vorzeichen vor 1 mit der gegebenen Gleichung überein, so bilden die Werthe

$$x = +\alpha \text{ und } y = -\beta,$$

entgegengesetzten Falles aber die Werthe

$$x = -\alpha \text{ und } y = +\beta$$

eine Auflösung der gegebenen Gleichung, und man findet nun leicht weitere Auflösungen, indem man zu dem Werthe der einen Unbekannten x den Coefficienten der andern y wiederholt addirt und von dem Werthe von y den Coefficienten von x eben so oft subtrahirt oder umgekehrt von dem Werthe von x den Coefficienten von y subtrahirt und zu dem Werthe von y den Coefficienten von x addirt.

Es sei zunächst die Gleichung

$$22x + 9y = -1$$

gegeben; so ist der dem vollständigen Bruche $\frac{22}{9}$ vorangehende Partialbruch $\frac{5}{2}$;

nun ist $$22 . 2 - 9 . 5 = -1.$$

Da diese Gleichung in dem Vorzeichen vor 1 mit der gegebenen Gleichung übereinstimmt, so bilden die Werthe $x = +2$ und $y = -5$

eine Auflösung der gegebenen Gleichung und die allgemeinen Auflösungen sind

$$x = +2 - 9n \text{ und } y = +22n - 5.$$

Es sei ferner die Gleichung $13x + 20y = +1$

gegeben; dann ist der dem Bruche $\frac{20}{13}$ vorangehende Partialbruch $\frac{3}{2}$. Da aber die Gleichung $$13 . 3 - 20 . 2 = -1$$

vor 1 das entgegengesetzte Zeichen wie die gegebene hat, so kehren wir in der zuletzt erhaltenen Gleichung die Zeichen um, also

$$-13 . 3 + 20 . 2 = +1$$

und setzen demgemäß $x = -3$ und $y = +2$.

Die allgemeinen Auflösungen der gegebenen Gleichung sind folglich

$$x = 20n - 3 \text{ und } y = 2 - 13n.$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $35x + 26y = +1 . \begin{cases} x = 3 - 26n \\ y = 35n - 4 \end{cases}$

2) $21x + 32y = -1 . \begin{cases} x = 3 - 32n \\ y = 21n - 2 \end{cases}$

3) $25x + 23y = +1 . \begin{cases} x = 23n - 11 \\ y = 12 - 25n \end{cases}$

4) $9x + 20y = -1 . \begin{cases} x = 20n - 9 \\ y = 4 - 9n. \end{cases}$

§. 310. Aufgabe.

Die unbestimmte Gleichung

$$ax + by = \pm c$$

in ganzen Zahlen aufzulösen.

Aufl. Man suche nach §. 309 eine Auflösung der Gleichung

$$ax' + by' = \pm 1$$

und multiplicire die erhaltenen Werthe von x' und y' mit c, so bilden die Producte eine Auflösung der gegebenen Gleichung. Weitere Auflösungen können nun leicht nach §. 306 erhalten werden.

Es sei z. B. die Gleichung

$$21x + 31y = 859$$

gegeben. Wir zerfällen am bequemsten 859 in $21 . 41 - 2$ und erhalten so

$$21x + 31y = 21 . 41 - 2$$

oder $$21(x - 41) + 31y = -2.$$

Setzen wir $x - 41 = u$, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$21u + 31y = -2.$$

Lösen wir dann die Gleichung

$$21u' + 31y' = -1$$

auf bekannte Weise auf, so ergibt sich

$$u' = -3 \text{ und } y' = +2,$$

folglich $$u = -6 \text{ und } y = +4.$$

Es war $x - 41 = u$, also $x = 41 + u$; wir erhalten so zunächst für die gegebene Gleichung die Auflösung

$$x = +35,\ y = +4$$

und dann weiter nach §. 306

$$x = +\ 4,\ y = +25$$
$$x = -27,\ y = +46 \text{ u. s. w.}$$

allgemein: $$x = 35 - 31n,\ y = 4 + 21n.$$

Zur weiteren Uebung können folgende Beispiele dienen:

1. Aufg. $12x + 7y = 200$

Aufl.	$x = -9$	-2	$+5$	$+12$	$+19\ldots$	$5 + 7n$
	$y = +44$	$+32$	$+20$	$+8$	$-4\ldots$	$20 - 12n$

2. Aufg. $15x + 28y = 417$

Aufl.	$x = +67$	$+39$	$+11$	$-17\ldots$	$11 - 28n$
	$y = -21$	-6	$+9$	$+24\ldots$	$9 + 15n$

3. Aufg. $18x + 11y = 315$

Aufl.	$x = +12$	$+1$	$-10\ldots$	$12 - 11n$
	$y = +9$	$+27$	$+45\ldots$	$9 + 18n$

4. Aufg. $16x + 27y = 271$

Aufl.	$x = -5$	$+22$	$+49\ldots$	$27n - 5$
	$y = +13$	-3	$-19\ldots$	$13 - 16n$.

Endlich wollen wir noch als Anwendungen der vorhergehenden Sätze folgende Aufgaben hinzufügen:

1) In einer Gesellschaft bezahlt jeder Herr 17 Sgr. und jede Frau 12 Sgr.; wenn nun die Herren zusammen 1 Sgr. mehr als die Frauen bezahlen, aus wie viel Herren und Frauen bestand die Gesellschaft? — Antw. Entweder aus 5 Herren und 7 Frauen oder 17 Herren und 24 Frauen oder 29 Herren und 41 Frauen u. s. w.

2) A will an B 3 Thlr. bezahlen. Wenn nun A nur Fünffrankenstücke zu 1 Thlr. 10 Sgr. und B nur Kronenthaler zu 1 Thlr. 17 Sgr. besitzt, wie viel Fünffrankenstücke muß A an B geben, und wie viel Kronenthaler muß B an A zurückzahlen? — Antw. A muß an B 14 Fünffrankenstücke und B an A 10 Kronenthaler zahlen.

3) Wie lassen sich 140 Thlr. in Ducaten und Friedrichsd'or ausdrücken, wenn ein Dukaten zu 3 Thlr. 5 Sgr. und ein Friedrichsd'or zu 5 Thlr. 20 Sgr. gerechnet wird? — Antw. 12 Ducaten und 18 Friedrichsd'or.

4) Eine Gesellschaft, aus Herren und Frauen bestehend, verzehrt zusammen 13 Thlr. 1 Sgr.; wenn nun jeder Herr 14 Sgr. und jede Frau 9 Sgr. zu bezahlen hat, aus wie viel Personen bestand die Gesellschaft? — Antw. Aus 8 Herren und 31 Frauen oder 17 Herren und 17 Frauen oder 26 Herren und 3 Frauen.

5) Die Zahl 287 soll in zwei Theile so zerlegt werden, daß der eine durch 9 und der andere durch 11 aufgeht. Wie heißen diese Theile? — Antw. 243 und 44 oder 144 und 143 oder 45 und 242.

6) Man soll die Zahl 200 in zwei Theile so zerlegen, daß der eine durch 15 dividirt 8 und der andere durch 16 dividirt 5 zum Rest läßt. Welche Theile sind es? — Antw. 83 und 117.

6*) Welche Zahlen lassen durch 5 dividirt 3 und durch 7 dividirt 4 zum Rest? — Antw. 18, 53, 88, 123 . . ., überhaupt alle Zahlen von der Form $35n + 18$.

7) Ein Landwirth kauft 30 Stück Vieh, Ziegen, Schafe und Schweine zusammen für 212 Thlr. Er zahlt für die Ziege 5 Thlr., für das Schaf $6\frac{1}{2}$ Thlr. und für das Schwein 10 Thlr. Wie viel Stück von jeder Gattung sind es? — Antw. 5 Ziegen, 18 Schafe und 7 Schweine oder 12 Ziegen, 8 Schafe und 10 Schweine.

8) 100 Kugeln, Bomben, Granaten und Paßkugeln kosten zusammen 100 Thlr.; eine Bombe kostet 10 Thlr., eine Granate 5 Thlr., eine Paßkugel 1/2 Thlr.; wie viel von jeder Art sind es? — Antw. Eine Bombe, 9 Granaten und 90 Paßkugeln.

§. 311. Aufgabe.

Zwei einfache Gleichungen mit drei unbekannten Buchstaben y, x, z in ganzen Zahlen aufzulösen.

Aufl. Man eliminire zwischen den gegebenen Gleichungen einen der unbekannten Buchstaben z und löse die entstandene Eliminationsgleichung nach x und y auf; hat man hierdurch

$$x = \alpha + \gamma w \text{ und } y = \beta + \delta w$$

gefunden, so setze man diese Werthe in eine der ursprünglichen Gleichungen ein, löse dieselbe nach w und z auf und setze den Werth von w in die vorher für x und y gefundenen Werthe ein.

Es sei z. B.

$$3x + 2y + 4z = 300$$
$$-4x + 5y + 2z = 200;$$

so erhält man durch Elimination von z

$$11x - 8y = -100$$

oder

$$8y - 11x = 100.$$

Die Auflösungen dieser Gleichungen sind

$$x = 4 + 8w \text{ und } y = 18 + 11w.$$

Setzt man diese Werthe in die erste der gegebenen Gleichungen, so verwandelt sich dieselbe in

$$46w + 4z = 252$$

oder

$$2z + 23w = 126,$$

aus welcher sich

$$w = 2n \text{ und } z = 63 - 23n$$

ergibt. Setzt man nun noch den für w gefundenen Werth in die obigen Werthe für x und y ein, so sind die Auflösungen der vorgelegten Gleichungen

$$x = 4 + 16n,\ y = 18 + 22n,\ z = 63 - 23n.$$

Will man sich auf positive Zahlen beschränken, so darf man n nicht größer als 2 annehmen, und dann haben die obigen Gleichungen überhaupt nur 3 Auflösungen, nämlich

$$\text{für } n = 0,\ x = 4,\ y = 18,\ z = 63;$$
$$\text{für } n = 1,\ x = 20,\ y = 40,\ z = 40;$$
$$\text{für } n = 2,\ x = 36,\ y = 62,\ z = 17.$$

Ist ferner gegeben

$$3x - 2y + 5z = 71$$

und

$$6x + 5y - 3z = 127$$

so ist

$$x = 12 + 19n,\ y = 20 - 39n,\ z = 15 - 27n.$$

§. 312. Zusatz.

Hiernach ist nun auch leicht zu sehen, wie man drei einfache Gleichungen mit 4 unbekannten Zahlen und überhaupt n — 1 Gleichungen mit n Unbekannten auflöst.

Bemerkung.

Die Auflösung der unbestimmten quadratischen Gleichungen bietet im allgemeinen viel mehr Schwierigkeit dar, und es soll daher von diesen hier nur ein Beispiel angeführt werden in der folgenden

§. 313. Aufgabe.

Die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

nach x, y und z in ganzen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$, $z = p^2 + q^2$, wo man statt p und q alle möglichen ganzen Zahlen zu setzen hat.

Beweis. Denn es ist hiernach

$$x^2 = 4p^2q^2$$

und $$y^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4,$$

folglich $$z^2 = x^2 + y^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4,$$

also $$z = p^2 + q^2.$$

So ist z. B. für

$p = 2$ und $q = 1$; $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$,

$p = 3$ und $\begin{cases} q = 1; & x = 6, \ y = 8, \ z = 10, \\ q = 2; & x = 12, \ y = 5, \ z = 13, \end{cases}$

$p = 4$ und $\begin{cases} q = 1; & x = 8, \ y = 15, \ z = 17, \\ q = 2; & x = 16, \ y = 12, \ z = 20, \\ q = 3; & x = 24, \ y = 7, \ z = 25, \end{cases}$

und dgl.

Bekanntlich ist in jedem rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Catheten. Wenn daher in der obigen Gleichung x, y und z die Maßzahlen von Linien vorstellen, so bilden diese Linien die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Man nennt dergleichen Dreiecke, deren Seiten ein rationales Verhältniß haben, pythagoräische.

Druck von G. D. Bädeker in Essen.

Math.

Koppe